

# ВЕСЦІ

## НАЦЫЯНАЛЬНАЯ АКАДЭМІЯ НАВУК БЕЛАРУСІ

СЕРИЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК 2015 № 4

# ИЗВЕСТИЯ

## НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК 2015 № 4

ЗАСНАВАЛЬНІК – НАЦЫЯНАЛЬНАЯ АКАДЭМІЯ НАВУК БЕЛАРУСІ

Часопіс выдаецца са студзеня 1965 г.

Выходзіць чатыры разы ў год

### ЗМЕСТ

Гражданин, ученый, государственный деятель. Памяти академика Николая Александровича Борисевича 5

### МАТЭМАТЫКА

- Корзюк В. И., Мандрик А. А.** Первая смешанная задача в полуполосе для неоднородного нестрого гиперболического уравнения третьего порядка ..... 10
- Матысик О. В.** Неявный метод решения самосопряженной некорректной задачи с приближенным оператором и апостериорным выбором параметра регуляризации ..... 18
- Ровба Е. А., Дирвук Е. В.** О константе Лебега интерполяционных рациональных процессов Лагранжа по узлам Чебышева – Маркова ..... 25
- Малютин В. Б.** Вычисление матричнозначных функциональных интегралов, основанное на аппроксимации хронологически упорядоченной экспоненты ..... 32
- Муха В. С., Кузьков А. Н.** Линейное пропорциональное Прокрустово преобразование в распознавании рукописных букв ..... 38
- Гальмак А. М.** Единицы и их аналоги в  $l$ -арных группах ..... 46

### ФІЗІКА

- Курочкин Ю. А., Шелковый Д. В., Боярина И. П.** О переменных центра масс и относительного движения в трехмерных пространствах с радиусом кривизны, зависящим от времени ..... 56
- Овсюк Е. М., Редько А. Н., Редьков В. М.** Частица Дирака – Кэлера в пространстве Лобачевского, нерелятивистское приближение, бозонная интерпретация ..... 61

<b>Кулак Г. В., Крох Г. В., Ропот П. И., Шакин О. В.</b> Коллинеарное акустооптическое взаимодействие бес- селевых световых пучков в двуосных кристаллах .....	71
<b>Батище С. А., Бушук С. Б., Кузьмук А. А., Савич А. В., Татур Г. А., Грабнер Г., Котэк В.</b> Лазерная абляционная обработка роговицы глаза комбинированным излучением 213+1440 нм .....	77
<b>Коршунов Ф. П., Жданович Н. Е., Гуринович В. А., Лукша С. В.</b> Влияние электронного облучения на электрические характеристики <i>p-n</i> -структур на ядерно-легированном кремнии .....	82
<b>Гончаренко И. А., Рябцев В. Н.</b> Метод расчета изогнутых микроструктурированных волноводов с не- сколькими сердцевинами .....	87

#### ІНФАРМАТЫКА

<b>Залесский Б. А., Середин Э. Н.</b> Метод нечеткой кластеризации <i>k</i> -средних со штрафной функцией и про- извольными степенями вектора принадлежности .....	96
<b>Сотсков Ю. Н., Егорова Н. Г., Вернер Ф.</b> Многогранник оптимальности расписания, минимизирующего сумму взвешенных моментов завершения обслуживания требований .....	103
<b>Войткова М. В., Хурса Р. В.</b> Интеллектуальный анализ данных для диагностики латентных нарушений гемодинамики: условия практического применения .....	112

#### КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

<b>Гончаренко А. М.</b> О распространении солитонов в отрицательных селфоках .....	119
------------------------------------------------------------------------------------	-----

#### ВУЧОНЫЯ БЕЛАРУСІ

<b>Николай Станиславович Казак</b> (К 70-летию со дня рождения) .....	121
<b>Паказальнік артыкулаў, змешчаных у часопісе «Весці НАН Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных наук» у 2015 годзе</b> .....	123

---

ІЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ 2015 № 4

Серия физико-математических наук

*На русском, белорусском и английском языках*

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь,  
свидетельство о регистрации № 392 от 18.05.2009

---

Комп'ютарная вёрстка *В. Л. Смольскай*

Здадзена ў набор 23.11.2015. Падпісана да друку 18.12.2015. Выхад у свет 29.12.2015. Фармат 60×84<sup>1</sup>/<sub>8</sub>. Папера афсетная.

Друк лічбавы. Ум. друк. арк. 14,88. Ул.-выд. арк. 16,4. Тыраж 70 экз. Заказ 246.

Кошт нумару: індывідуальная падпіска – 83 600 руб.; ведамасная падпіска – 203 287 руб.

Выдавец і паліграфічнае выкананне:

Рэспубліканскае ўнітарнае прадпрыемства «Выдавецкі дом «Беларуская навука». Пасведчанне аб дзяржаўнай  
рэгістрацыі выдаўца, вытворцы, распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/18 ад 02.08.2013.

ЛП 02330/455 ад 30.12.2013. Вул. Ф. Скарыны, 40, 220141, г. Мінск.

© Выдавецкі дом «Беларуская навука».  
Весці НАН Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук, 2015

# PROCEEDINGS

## OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

---

PHYSIC AND MATHEMATICS SERIES 2015 N 4

---

FOUNDED IS THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

The Journal has been published since January 1965

Issued four times a year

### CONTENTS

**Citizen, scientist, statesman.** In memory of Academician Nikolai Aleksandrovich Borisevich ..... 5

#### MATHEMATICS

- Korzyuk V. I., Mandryk A. A.** First mixed problem in the half-band for the third-order nonhomogeneous non-strictly hyperbolic equation ..... 10
- Matysik O. V.** Implicit method for solving a self-adjoint ill-posed problem with an approximate operator and an a posteriori choice of the regularization parameter ..... 18
- Rovba Y. A., Dirvuk Y. V.** Estimation of the Lebesgue constant for the rational Lagrange interpolation processes through the Chebyshev – Markov nodes ..... 25
- Malyutin V. B.** Evaluation of matrix valued functional integrals based on the approximation of a chronologically ordered exponent ..... 32
- Mukha V. S., Kuzkou A. N.** Linear proportional Procrustes transformation in recognition of handwritten letters ..... 38
- Gal'mak A. M.** Identities and their analogues in  $n$ -ary groups ..... 46

#### PHYSICS

- Kurochkin Yu. A., Shoukovy Dz. V., Boyurina I. P.** Mass center and relative motion variables in three-dimensional spaces with a time-dependent curvature radius ..... 56
- Ovsyuk E. M., Red'ko A. N., Red'kov V. M.** Dirac – Kahler particle in the Lobachevsky space, non-relativistic approximation, boson interpretation ..... 61
- Kulak G. V., Krokh G. V., Ropot P. I., Shakin O. V.** Collinear acousto-optic interaction of Bessel light beams in biaxial crystals ..... 71
- Batishche S. A., Bushuk S. B., Kouzmouk A. A., Savitch A. V., Tatur H. A., Grabner G., Kautek W.** Combined 213 nm+1444 nm laser ablation treatment of bovine cornea ..... 77
- Korshunov F. P., Zhdanovich N. E., Gurinovich V. A., Luksha S. V.** Effect of electron radiation on the electrical characteristics of the  $p$ - $n$ -structures based on nuclear-doped silicon ..... 82
- Goncharenko I. A., Reabtsev V. N.** Method of calculation of bent multi-core microstructured fibers ..... 87

## INFORMATICS

<b>Zalesky B. A., Seredin E. N.</b> Fuzzy C-means clustering method with the Gibbs penalty function and arbitrary powers of the vector accessories .....	96
<b>Sotskov Yu. N., Egorova N. G., Werner F.</b> Optimality box of the schedule minimizing the sum of the weighted completion times of the job .....	103
<b>Voitikova M. V., Khursa R. V.</b> Diagnostics of latent hemodynamics by data mining: conditions of practical use .....	112

## SHORT COMMUNICATIONS

<b>Goncharenko A. M.</b> Propagation of solitons in negative selfocs .....	119
----------------------------------------------------------------------------	-----

## SCIENTISTS OF BELARUS

<b>Kazak Nicolai Stanislavovich</b> (On the 70 <sup>th</sup> anniversary of his birthday) .....	121
<b>List of Publications for 2015 in “Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series”</b> .....	126

*В. И. КОРЗЮК<sup>1, 2</sup>, А. А. МАНДРИК<sup>2</sup>*

## **ПЕРВАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА В ПОЛУПОЛОСЕ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО НЕСТРОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА**

*<sup>1</sup>Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь,  
korzyuk@bsu.by*

*<sup>2</sup>Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,  
mndkaa@gmail.com*

Изучается классическое решение граничной задачи для неоднородного нестроого гиперболического уравнения третьего порядка. Уравнение задается в полуполосе двух независимых переменных. На нижнем основании области задаются условия Коши, а на боковых границах – условия Дирихле. Методом характеристик выписывается в аналитическом виде решение рассматриваемой задачи. Доказывается единственность решения.

*Ключевые слова:* нестроого гиперболическое уравнение, неоднородное уравнение, смешанная задача, условия согласования.

*V. I. KORZYUK<sup>1, 2</sup>, A. A. MANDRYK<sup>2</sup>*

## **FIRST MIXED PROBLEM IN THE HALF-BAND FOR THE THIRD-ORDER NONHOMOGENEOUS NONSTRICTLY HYPERBOLIC EQUATION**

*<sup>1</sup>Belarusian State University, Minsk, Belarus,  
korzyuk@bsu.by*

*<sup>2</sup>Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,  
mndkaa@gmail.com*

This article is concerned with studying the classical solution of the boundary problem for the third-order nonhomogeneous nonstrictly hyperbolic equation. The equation is defined in the half-band of two independent variables. There are Cauchy's conditions at the bottom of the domain and Dirichlet's conditions at side boundaries. Using the method of characteristics, the analytic solution of the considered problem is written. The uniqueness of the solution is proved.

*Keywords:* nonstrictly hyperbolic equation, nonhomogeneous equation, mixed problem, matching conditions.

*О. В. МАТЫСИК*

## **НЕЯВНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ САМОСОПРЯЖЕННОЙ НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧИ С ПРИБЛИЖЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ И АПОСТЕРИОРНЫМ ВЫБОРОМ ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ**

*Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина, Брест, Беларусь,  
e-mail: matysikoleg@mail.ru*

Данная статья ставит своей целью изучение свойств неявного итерационного метода решения некорректных операторных уравнений первого рода, заданных в гильбертовом пространстве, с ограниченным самосопряженным оператором, в предположении, что погрешности имеются не только в правой части уравнения, но и в операторе. Доказана сходимость метода с апостериорным выбором числа итераций, найдены оценка погрешности метода и оценка для апостериорного момента останова. Полученные результаты могут быть использованы в теоретических исследованиях при решении операторных уравнений первого рода, а также прикладных некорректных задач, которые встречаются в динамике и кинетике, математической экономике, геофизике, спектроскопии, системах полной автоматической обработки и интерпретации экспериментов, диагностике плазмы, сейсмике, медицине.

*Ключевые слова:* неявный итерационный метод, некорректная задача, гильбертово пространство, самосопряженный приближенный оператор, правило останова по невязке.

O. V. MATYSIK

**IMPLICIT METHOD FOR SOLVING A SELF-ADJOINT ILL-POSED PROBLEM  
WITH AN APPROXIMATE OPERATOR AND AN A POSTERIORI CHOICE  
OF THE REGULARIZATION PARAMETER**

*Brest State University named after A. S. Pushkin, Brest, Belarus,  
e-mail: matysikoleg@mail.ru*

The implicit iteration method for solution of the first-kind operator equations with a non-negative self-adjoint bounded operator in the Hilbert space is proposed. Convergence of the method is proved in the case of an a posteriori choice of the regularization parameter in the usual norm of the Hilbert space, supposing that not only the right hand-side of the equation, but also the operator have errors. The estimates of a method error and an a posteriori stop moment are obtained.

*Keywords:* implicit iteration method, incorrect problem, Hilbert space, self-adjoint approximate operator, discrepancy stopping rule.

УДК 513.51

E. A. РОВБА, Е. В. ДИРВУК

**О КОНСТАНТЕ ЛЕБЕГА ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ  
ПРОЦЕССОВ ЛАГРАНЖА ПО УЗЛАМ ЧЕБЫШЕВА – МАРКОВА**

*Гродненский государственный университет им. Янки Купалы, Гродно, Беларусь,  
e-mail: rovba.ea@gmail.com, dirvuk@gmail.com*

В настоящей работе рассматриваются интерполяционные процессы Лагранжа, в которых в качестве узлов интерполирования выбираются нули рациональных функций Чебышева – Маркова первого рода. Получена оценка константы Лебега в случае действительных полюсов.

*Ключевые слова:* интерполяционные процессы Лагранжа, рациональные функции Чебышева – Маркова, оценка константы Лебега.

Y. A. ROVBA, Y. V. DIRVUK

**ESTIMATION OF THE LEBESGUE CONSTANT FOR THE RATIONAL  
LAGRANGE INTERPOLATION PROCESSES THROUGH THE CHEBYSHEV – MARKOV NODES**

*Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus,  
e-mail: rovba.ea@gmail.com, dirvuk@gmail.com*

This article considers the Lagrange interpolation processes, in which as interpolation nodes the zeros of the first-kind rational Chebyshev – Markov functions are chosen. The Lebesgue constant in the case of real poles is estimated.

*Keywords:* Lagrange interpolation process, rational Chebyshev – Markov functions, estimate of the Lebesgue constant.

УДК 519.6

В. Б. МАЛЮТИН

**ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЧНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ,  
ОСНОВАННОЕ НА АППРОКСИМАЦИИ ХРОНОЛОГИЧЕСКИ  
УПОРЯДОЧЕННОЙ ЭКСПОНЕНТЫ**

*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,  
e-mail: malyutin@im.bas-net.by*

Предложен метод приближенного вычисления матричнозначных функциональных интегралов при малых значениях параметра  $b$ , входящего в дифференциальное уравнение для переходной функции. Этот метод основывается на аппроксимации хронологически упорядоченной экспоненты обычными экспонентами.

*Ключевые слова:* функциональные интегралы, хронологически упорядоченная экспонента.

V. B. MALYUTIN

**EVALUATION OF MATRIX VALUED FUNCTIONAL INTEGRALS BASED ON THE APPROXIMATION OF A CHRONOLOGICALLY ORDERED EXPONENT**

*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,  
e-mail: malyutin@im.bas-net.by*

The method for approximate evaluation of matrix valued functional integrals with a small parameter  $b$  in the differential equation for the transition function is proposed. This method is based on the approximation of a chronologically ordered exponent by usual exponents.

*Keywords:* functional integrals, chronologically ordered exponent.

УДК 517.514

*B. C. МУХА, А. Н. КУЗЬКОВ*

**ЛИНЕЙНОЕ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЕ ПРОКРУСТОВО ПРЕОБРАЗОВАНИЕ  
В РАСПОЗНАВАНИИ РУКОПИСНЫХ БУКВ**

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь,  
e-mail: mukha@bsuir.by*

Разработано линейное пропорциональное преобразование обычных (двумерных) матриц. Преобразование реализовано в виде компьютерной программы и применено для распознавания рукописных букв кириллицы. Предложенное преобразование показало более высокую достоверность распознавания в сравнении с другими преобразованиями.

*Ключевые слова:* Прокрустово преобразование, распознавание рукописных букв, многомерная линейная регрессия, многомерные матрицы.

*V. S. MUKHA, A. N. KUZKOU*

**LINEAR PROPORTIONAL PROCRUSTES TRANSFORMATION  
IN RECOGNITION OF HANDWRITTEN LETTERS**

*Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus,  
e-mail: mukha@bsuir.by*

The linear proportional transformation of two-dimensional matrices was developed. This transformation was implemented as a computer program and was applied to recognize handwritten Cyrillic letters. The proposed transformation showed higher recognition accuracy in comparison with other transformations.

*Keywords:* Procrustes transformation, recognition of handwritten letters, multi-variate linear regression, multi-dimensional matrix.

УДК 512.548

*А. М. ГАЛЬМАК*

**ЕДИНИЦЫ И ИХ АНАЛОГИ В  $n$ -АРНЫХ ГРУППАХ**

*Могилевский государственный университет продовольствия, Могилев, Беларусь,  
e-mail: halm54@mail.ru*

Основным результатом данной работы является теорема, утверждающая, что в универсальной обертывающей группе любой  $n$ -арной группы все классы эквивалентности Поста, определяемые  $m$ -нейтральными последовательностями, образуют  $(k + 1)$ -арную группу, которая при  $m = n$  изоморфна  $n$ -арной подгруппе всех единиц  $n$ -арной группы. Среди следствий этой теоремы находится известный результат, согласно которому в любой  $n$ -арной группе множество всех единиц, если оно не пусто, является характеристической  $n$ -арной подгруппой, лежащей в центре  $n$ -арной группы.

*Ключевые слова:*  $n$ -арная группа, единица, нейтральная последовательность.

**IDENTITIES AND THEIR ANALOGUES IN  $n$ -ARY GROUPS**

*Mogilev State University of Food Technologies, Mogilev, Belarus,  
e-mail: halm54@mail.ru*

The main result of the article is the theorem stating that in the universal covering group of any  $n$ -ary group all classes of Post's equivalence determined as  $m$ -neutral sequences form the  $(k + 1)$ -ary group that at  $m = n$  is isomorphic to the  $n$ -ary subgroup of all identities of the  $n$ -ary group. Among the consequences of the theorem is a well-known result, according to which in any  $n$ -ary group the set of all the identities, if it is not empty, is a characteristic  $n$ -ary subgroup lying in the center of the  $n$ -ary group.

*Keywords:*  $n$ -ary group, identity, neutral sequence.

УДК 530.12

*Ю. А. КУРОЧКИН<sup>1</sup>, Д. В. ШЕЛКОВЫЙ<sup>1</sup>, И. П. БОЯРИНА<sup>2</sup>*

**О ПЕРЕМЕННЫХ ЦЕНТРА МАСС И ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ  
В ТРЕХМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С РАДИУСОМ КРИВИЗНЫ,  
ЗАВИСЯЩИМ ОТ ВРЕМЕНИ**

*<sup>1</sup>Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь  
e-mail: yukuroch@dragon.bas-net.by, Shoukavy@dragon.bas-net.by*

*<sup>2</sup>Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск, Беларусь,  
e-mail: ipboyarina@mail.ru*

В работе с использованием бикватернионов определены выражения для координат центра масс и относительного движения двух материальных частиц в трехмерном пространстве Лобачевского и на трехмерной сфере. Построено нерелятивистское действие для двух материальных точек в этих пространствах. Показано, что подинтегральное выражение данного действия только слагаемым, представляющим собой квадрат производной радиуса кривизны, по времени отличается от действия для случая пространств с радиусом кривизны, не зависящим от времени. Таким образом, задача разделения переменных центра масс системы двух частиц и их относительного движения сводится к тому же результату, что и в пространствах с постоянным радиусом, т. е. переменные не разделяются.

*Ключевые слова:* координаты центра масс, координаты относительного движения, бикватернионы, трехмерная сфера, трехмерное пространство Лобачевского, действие, разделение переменных.

*Yu. A. KUROCHKIN<sup>1</sup>, Dz. V. SHOUKOVY<sup>1</sup>, I. P. BOYURINA<sup>2</sup>*

**MASS CENTER AND RELATIVE MOTION VARIABLES IN THREE- DIMENSIONAL SPACES  
WITH A TIME-DEPENDENT CURVATURE RADIUS**

*<sup>1</sup>B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,  
e-mail: yukuroch@dragon.bas-net.by, Shoukavy@dragon.bas-net.by*

*<sup>2</sup>Belarusian State Agrarian Technical University, Minsk, Belarus,  
e-mail: ipboyarina@mail.ru*

Expressions for the variables of the mass center and the relative motion of two material particles in the three-dimensional Lobachevsky space and in the three-dimensional sphere with a time-dependent radius curvature are defined in terms of biquaternions. By using the action of the two particles in the above spaces, we have found that the problem of separation of the mass center and relative motion coordinates of this system reduces to the problem in the spaces of a completely constant curvature.

*Keywords:* mass center coordinates, relative motion coordinates; biquaternions, three-dimensional sphere, Lobachevsky space; action, separation of variables.

*Е. М. ОВСИЮК<sup>1</sup>, А. Н. РЕДЬКО<sup>2</sup>, В. М. РЕДЬКОВ<sup>2</sup>*

**ЧАСТИЦА ДИРАКА – КЭЛЕРА В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО,  
НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ, БОЗОННАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ**

<sup>1</sup>*Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина, Мозырь, Беларусь,  
e-mail: e.ovsiyuk@mail.ru*

<sup>2</sup>*Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,  
e-mail: v.redkov@dragon.bas-net.by*

В работе построены точные решения для уравнения Дирака – Кэлера в нерелятивистском приближении для случая простейшей неевклидовой геометрической модели – гиперболического пространства Лобачевского. Для случая минимального значения общего сохраняющегося углового момента,  $j = 0$ , радиальные уравнения приведены к решаемым в элементарных функциях уравнениям. В случае ненулевых значений углового момента,  $j = 1, 2, 3, \dots$ , радиальные уравнения сводятся к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям четвертого порядка. С применением метода факторизации построено общее решение этих уравнений, включающее четыре фундаментальных решения; последние представлены в виде комбинаций из гипергеометрических функций. Найденные решения уравнения Дирака – Кэлера на фоне пространства Лобачевского не раскладываются в линейные функции, отвечающие решениям уравнений Паули в этом пространстве, что указывает на невозможность фермионной интерпретации поля Дирака – Кэлера.

*Ключевые слова:* частица Дирака – Кэлера, уравнение Паули, точные решения, метод факторизации, бозонная интерпретация.

*E. M. OVSIYUK<sup>1</sup>, A. N. RED'KO<sup>2</sup>, V. M. RED'KOV<sup>2</sup>*

**DIRAC – KAHLER PARTICLE IN THE LOBACHEVSKY SPACE,  
NON-RELATIVISTIC APPROXIMATION, BOSON INTERPRETATION**

<sup>1</sup>*Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin, Mozyr, Belarus,  
e-mail: e.ovsiyuk@mail.ru*

<sup>2</sup>*B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,  
e-mail: v.redkov@dragon.bas-net.by*

The article is concerned with constructing the exact solutions for the Dirac – Kahler wave equation in the non-relativistic approximation for the simplest non-Euclidean geometrical model – hyperbolic Lobachevsky space. For the minimum value of the conserved angular momentum  $j = 0$ , the radial equations reduce to those solved in the elementary function. For greater values  $j = 1, 2, 3, \dots$ , the radial equations reduce to a couple of the four-order differential equations that are solved with the help of the factorization method. The general solution to each four-order order equation, involving four fundamental solutions, is constructed. The obtained solutions of the Dirac – Kahler wave equation cannot be solved in terms of the Pauli solutions on the background of Lobachevsky space, therefore any fermion interpretation for the Dirac – Kahler particle cannot be used.

*Keywords:* Dirac – Kahler particle, Pauli equation, exact solutions, factorization method, boson interpretation.

*Г. В. КУЛАК<sup>1</sup>, Г. В. КРОХ<sup>1</sup>, П. И. РОПОТ<sup>2</sup>, О. В. ШАКИН<sup>3</sup>*

**КОЛЛИНЕАРНОЕ АКУСТООПТИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ  
БЕССЕЛЕВЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ В ДВУОСНЫХ КРИСТАЛЛАХ**

<sup>1</sup>*Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина, Мозырь, Беларусь,  
e-mail: g.kulak57@mail.ru*

<sup>2</sup>*Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,  
e-mail: p.ropot@dragon.bas-net.by*

<sup>3</sup>*Государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, Россия,  
e-mail: oshakin@mail.ru*

Рассмотрено коллинеарное акустооптическое преобразование бесселевых световых пучков в два кольцевых пучка внутренней конической рефракции. С использованием метода преобразования Фурье найдены выражения для потоков мощности дифрагированных кольцевых пучков внутренней конической рефракции в замкнутой форме. Для кристалла бифталата калия произведен расчет зависимости эффективности дифракции от интенсивности ультразвука и длины взаимодействия. На основе данного взаимодействия предложено создание коллинеарных перестраиваемых АО фильтров с узкой шириной полосы пропускания, достигающей  $0,1 \text{ \AA}$ .

*Ключевые слова:* коллинеарное акустооптическое взаимодействие, бесселевы световые пучки, внутренняя коническая рефракция, двuosный кристалл, эффективность дифракции.

G. V. KULAK<sup>1</sup>, G. V. KROKH<sup>1</sup>, P. I. ROPOT<sup>2</sup>, O. V. SHAKIN<sup>3</sup>

## COLLINEAR ACOUSTO-OPTIC INTERACTION OF BESSEL LIGHT BEAMS IN BIAXIAL CRYSTALS

<sup>1</sup>Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin, Mozyr, Belarus,  
e-mail: g.kulak57@mail.ru

<sup>2</sup>B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,  
e-mail: p.ropot@dragon.bas-net.by

<sup>3</sup>State University of Aerospace Instrumentation, Saint-Petersburg, Russia, e-mail: oshakin@mail.ru

The collinear acousto-optic transformation of Bessel light beams into two ring beams of internal conical refraction has been considered. Using the Fourier transformation method, the expressions for power flows of ring diffracted beams of internal conical refraction are found in closed form. For a potassium biftalate crystal, the dependence of the diffraction efficiency on the ultrasound intensity and interaction durability is calculated. Based on this interaction, the creation of collinear convertible AO filters with a narrow width of a transmission band of about 0.1 is proposed.

*Keywords:* collinear acousto-optic interaction, Bessel light beams, internal conical refraction, biaxial crystal, diffraction efficiency.

УДК 535.21;535.3

S. A. BATISHCHE<sup>1</sup>, S. B. BUSHUK<sup>1</sup>, A. A. KOUZMOUK<sup>1</sup>, A. V. SAVITCH<sup>1</sup>,  
H. A. TATUR<sup>1</sup>, G. GRABNER<sup>2</sup>, W. KAUTEK<sup>3</sup>

## COMBINED 213 nm+1444 nm LASER ABLATION TREATMENT OF BOVINE CORNEA

<sup>1</sup>B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,  
e-mail: batis@dragon.bas-net.by

<sup>2</sup>Paracelsus Medical University, University Eye Clinic, Salzburg, Austria,  
e-mail: G.Grabner@salk.at

<sup>3</sup>University of Vienna, Department of Physical Chemistry, Vienna, Austria,  
e-mail: wolfgang.kautek@univie.ac.at

The laser ablation efficiency of eye cornea for UV (213 nm) and combined IR+UV (213 nm + 1444 nm) ablation treatment in safe conditions, preventing laser coagulation at 1444 nm, was investigated. It is shown that the IR+UV combination, when, at the first stage of cornea treatment, an IR laser pulse at 1444 nm, falling into a water absorption band with an absorption coefficient of about  $31 \text{ cm}^{-1}$ , dehydrates a superficial corneal layer and at the second stage, in about 100  $\mu\text{s}$ , a UV laser pulse at 213 nm ablates a thin (about 1–3  $\mu\text{m}$ ) collagen layer, gives promising results. Due to the controlled dehydration of the corneal surface, the process of 213 nm + 1444 nm laser ablation ensures a better reproducibility and a higher productivity.

*Keywords:* cornea, ablation, Nd:YAG laser, absorption, threshold.

С. А. БАТИЩЕ<sup>1</sup>, С. Б. БУШУК<sup>1</sup>, А. А. КУЗЬМУК<sup>1</sup>, А. В. САВИЧ<sup>1</sup>, Г. А. ТАТУР<sup>1</sup>, Г. ГРАБНЕР<sup>2</sup>, В. КОТЭК<sup>3</sup>

## ЛАЗЕРНАЯ АБЛЯЦИОННАЯ ОБРАБОТКА РОГОВИЦЫ ГЛАЗА КОМБИНИРОВАННЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ 213+1440 НМ

<sup>1</sup>Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,  
e-mail: batis@dragon.bas-net.by

<sup>2</sup>Глазная клиника медицинского университета им. Парацельса, Зальцбург, Австрия,  
e-mail: G.Grabner@salk.at

<sup>3</sup>Венский университет, Вена, Австрия  
e-mail: wolfgang.kautek@univie.ac.at

Исследована эффективность лазерной абляции роговицы глаза УФ-излучением (213 нм) и комбинированным УФ+ИК-излучением (213 нм + 1444 нм) в условиях обработки, когда лазерная коагуляция на длине волны 1444 нм не происходит. Показано, что комбинированное УФ+ИК-воздействие, когда сначала ИК-лазерный импульс (1440 нм), попадающий в полосу поглощения воды с коэффициентом поглощения около  $31 \text{ см}^{-1}$ , обезвоживает поверхностный слой роговицы и следующий через ~100 мкс УФ-лазерный импульс (213 нм) удаляет тонкий поверхностный слой (1–3 мкм) коллагена, дает многообещающие результаты. Благодаря контролируемому обезвоживанию поверхности роговицы процесс лазерной абляции комбинированным (213 нм + 1444 нм) излучением обеспечивает лучшую воспроизводимость и более высокую производительность.

*Ключевые слова:* роговица, абляция, Nd:YAG-лазер, поглощение, порог.

*Ф. П. КОРШУНОВ, Н. Е. ЖДАНОВИЧ, В. А. ГУРИНОВИЧ, С. В. ЛУКША*

## **ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРОННОГО ОБЛУЧЕНИЯ НА ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ *p-n*-СТРУКТУР НА ЯДЕРНО-ЛЕГИРОВАННОМ КРЕМНИИ**

*Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению, Минск, Беларусь, e-mail: korshunov@ifftp.bas-net.by, jdan@ifftp.bas-net.by, gurinovich@ifftp.bas-net.by*

В работе проведены исследования влияния электронного облучения с энергией 4 МэВ на характеристики высоковольтных (до 4,5 кВ) диодных кремниевых *p-n*-структур, изготовленных на ядерно-легированном кремнии. Получены дозовые зависимости статических и динамических характеристик *p-n*-структур, определен коэффициент радиационных повреждений времени жизни неосновных носителей заряда  $K_T$ . С помощью метода DLTS-спектроскопии определено образование в запрещенной зоне базового *n-Si* шести энергетических уровней радиационных дефектов, влияющих на характеристики облученных *p-n*-структур.

*Ключевые слова:* электронное облучение, высоковольтные диодные *p-n*-структуры, статические и динамические характеристики, энергетические уровни.

*F. P. KORSHUNOV, N. E. ZHDANOVICH, V. A. GURINOVICH, S. V. LUKSHA*

## **EFFECT OF ELECTRON RADIATION ON THE ELECTRICAL CHARACTERISTICS OF THE *p-n*-STRUCTURES BASED ON NUCLEAR-DOPED SILICON**

*Scientific-Practical Materials Research Centre of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus, e-mail: korshunov@ifftp.bas-net.by, jdan@ifftp.bas-net.by, gurinovich@ifftp.bas-net.by*

The article studies the effect of electron radiation with energy of 4 MeV on the characteristics of high-voltage (4.5 kV) silicon diode *p-n*-structures based on nuclear-doped silicon. During the research the dose dependences of the correlations between the static and dynamic characteristics of the *p-n* structures were built, and the radiation damage coefficient of minority carrier lifetime  $K_T$  was determined. Using the DLTS-spectroscopy method, the formation in the band-gap of basic *n-Si* of six energy levels of radiation defects affecting the characteristics of irradiated *p-n*-structures was determined.

*Keywords:* electron irradiation, high-voltage diode *p-n*-structure, static and dynamic characteristics, energy levels.

*И. А. ГОНЧАРЕНКО, В. Н. РЯБЦЕВ*

## **МЕТОД РАСЧЕТА ИЗОГНУТЫХ МИКРОСТРУКТУРИРОВАННЫХ ВОЛНОВОДОВ С НЕСКОЛЬКИМИ СЕРДЦЕВИНАМИ**

*Командно-инженерный институт МЧС Республики Беларусь, Минск, Беларусь, e-mail: igor02@tut.by, v.reabtsev@gmail.com*

В работе представлена модификация метода линий для расчета параметров направляемых мод прямых и изогнутых микроструктурированных волокон с тремя сердцевинами. Проанализированы эффективные показатели преломления, коэффициент потерь на излучение, а также поперечное распределение полей основных мод таких волокон в зависимости от их структурных параметров (диаметра и разнесения воздушных отверстий, разнесения сердцевины) и величины изгиба.

*Ключевые слова:* микроструктурированное волокно, волокно с несколькими сердцевинами, метод линий, изгиб волокна, эффективный показатель преломления моды, распределение полей мод.

*I. A. GONCHARENKO, V. N. REABTSEV*

## **METHOD OF CALCULATION OF BENT MULTI-CORE MICRO-STRUCTURED FIBERS**

*Institute for Command Engineers of the Ministry for Emergency Situations of the Republic of Belarus, Minsk, Belarus, e-mail: igor02@tut.by, v.reabtsev@gmail.com*

We present the modification of the line method for calculation of the parameters of guided modes of straight and bent three-core microstructured fibers. On the basis of the method proposed, we analyzed the effective indices, radiation loss coefficients and a transverse field distribution of the fundamental modes in such fibers as a function of their structure (air holes diameter and separation, core separation) and bend value.

*Keywords:* microstructured fiber, multi-core fiber, line method, bent fiber, effective mode index, mode field distribution.

Б. А. ЗАЛЕССКИЙ, Э. Н. СЕРЕДИН

## МЕТОД НЕЧЕТКОЙ КЛАСТЕРИЗАЦИИ $k$ -СРЕДНИХ СО ШТРАФНОЙ ФУНКЦИЕЙ И ПРОИЗВОЛЬНЫМИ СТЕПЕНЯМИ ВЕКТОРА ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

*Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,  
e-mail: zalesky@newman.bas-net.by, eduard.seredin@tut.by*

Представлена новая версия метода нечеткой кластеризации  $k$ -средних, названная методом нечеткой кластеризации  $k$ -средних со штрафной функцией. Разработан алгоритм кластеризации полутоновых, цветных и мультисканальных изображений. Особенностью алгоритма является использование аддитивной штрафной функции гиббсовского типа для контроля локальной гладкости на однородных областях кластерного представления изображений. Локальная гладкость получаемых решений зависит от значений коэффициентов штрафной функции. Эти коэффициенты могут быть взяты как функции величины и направления градиента изображения. В отличие от известного алгоритма нечеткой кластеризации  $k$ -средних, который неустойчив по отношению к шумам и искажениям, присутствующим на изображении, предлагаемый алгоритм позволяет строить устойчивые кластерные представления на зашумленных и поврежденных изображениях. Свойства алгоритма проиллюстрированы на тестах с реальными изображениями. Эксперименты показали, что алгоритм, с одной стороны, корректно объединяет однородные области изображений в отдельные кластеры, а с другой – предотвращает слияние разнородных областей.

*Ключевые слова:* нечеткая кластеризация,  $k$ -средних, штрафная функция, вектор принадлежности, множители Лагранжа, EM-алгоритм, GPFCM, CUDA.

B. A. ZALESKY, E. N. SEREDIN

## FUZZY C-MEANS CLUSTERING METHOD WITH THE GIBBS PENALTY FUNCTION AND ARBITRARY POWERS OF THE VECTOR ACCESSORIES

*United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,  
e-mail: zalesky@newman.bas-net.by, eduard.seredin@tut.by*

A new version of the Fuzzy C-means clustering method, which we have called the Fuzzy C-means with the Gibbs Penalty (GPFCM), is introduced. The algorithm is designed to cluster gray scale, color and multichannel images. The specificity of the algorithm is to use the additive Gibbs penalty function in order to control the local smoothness of cluster representations of images in the regions of image homogeneity. The local smoothness of the solutions found by the GPFCM depends on the values of the coefficients of the penalty function. In turn, these coefficients can be taken as functions of magnitude and direction of the image gradient. Unlike the standard Fuzzy C-means clustering algorithm, which is unstable with respect to image noise and distortions, the proposed GPFCM allows building robust cluster approximations of noisy and corrupted pictures. Algorithm properties are illustrated on real images. Experiments have shown that on the one hand, the algorithm properly represents the homogeneous image regions as separate clusters and, on the other hand, it prevents the merging of different homogeneous areas.

*Keywords:* fuzzy clustering, C-means, penalty function, vector accessories, Lagrange multipliers, EM algorithm, GPFCM, CUDA.

Ю. Н. СОТСКОВ<sup>1</sup>, Н. Г. ЕГОРОВА<sup>1</sup>, Ф. ВЕРНЕР<sup>2</sup>

## МНОГОГРАННИК ОПТИМАЛЬНОСТИ РАСПИСАНИЯ, МИНИМИЗИРУЮЩЕГО СУММУ ВЗВЕШЕННЫХ МОМЕНТОВ ЗАВЕРШЕНИЯ ОБСЛУЖИВАНИЯ ТРЕБОВАНИЙ

<sup>1</sup>*Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,  
e-mail: sotskov@newman.bas-net.by, egorovanatalja@bk.ru*

<sup>2</sup>*Университет им. Отто фон Герике, Магдебург, Германия,  
e-mail: frank.werner@mathematik.uni-magdeburg.de*

В качестве меры устойчивости оптимальной перестановки  $\pi$  обслуживания в одностадийной обслуживающей системе множества требований к изменениям длительностей обслуживания требований предлагается использовать размерность и относительный объем многогранника оптимальности перестановки  $\pi$ . Для случайно сгенерированных задач проведено экспериментальное сравнение размерностей и относительных объемов многогранников оптимальности расписаний обслуживания требований и относительных погрешностей целевых функций с оптимальными значениями целевых функций, вычисленными для фактических длительностей обслуживания требований.

*Ключевые слова:* планирование, одностадийное обслуживание требований, взвешенные моменты завершения обслуживания требований, устойчивость, неопределенность, интервальные длительности обслуживания требований.

*Yu. N. SOTSKOV<sup>1</sup>, N. G. EGOROVA<sup>1</sup>, F. WERNER<sup>2</sup>*

**OPTIMALITY BOX OF THE SCHEDULE MINIMIZING THE SUM  
OF THE WEIGHTED COMPLETION TIMES OF THE JOB**

<sup>1</sup>*United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,  
e-mail: sotskov@newman.bas-net.by, egorovanatalja@bk.ru*

<sup>2</sup>*Otto-von-Guericke-University, Magdeburg, Germany,  
e-mail: frank.werner@mathematik.uni-magdeburg.de*

It is proposed to use an optimality box of the job permutation  $\pi$  as a measure of the stability of an optimal permutation  $\pi$  for processing a set of jobs in the single-stage processing system respecting to variations of the processing times of the jobs. For randomly generated problems, experimental comparison is made of the relative dimensions and the volumes of the optimality box for permutation and relative errors of the objective function with the optimal value of the objective function calculated for the actual processing jobs.

*Keywords:* scheduling, single machine problems, total weighted completion times, stability, uncertainty, interval processing times.

УДК: 004.89 004.94 612.13

*М. В. ВОЙТИКОВА<sup>1</sup>, Р. В. ХУРСА<sup>2</sup>*

**ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ  
ДЛЯ ДИАГНОСТИКИ ЛАТЕНТНЫХ НАРУШЕНИЙ ГЕМОДИНАМИКИ:  
УСЛОВИЯ ПРАКТИЧЕСКОГО ПРИМЕНЕНИЯ**

<sup>1</sup>*Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,  
e-mail: voitikova@imaph.bas-net.by*

<sup>2</sup>*Белорусский государственный медицинский университет, Минск, Беларусь,  
e-mail: rvkhursa@tut.by*

Исследовались особенности применения построенной с помощью интеллектуального анализа данных номограммы для классификации гемодинамических состояний по величинам артериального давления (АД) при суточном мониторинговании и случайном измерении АД стандартными измерительными приборами. При нанесении на номограмму вектора характерных особенностей АД, координаты которого есть набор коэффициентов линейной регрессии систолического, диастолического и пульсового давления, гемодинамическое состояние диагностируется по расположению вектора в определенных границах номограммы. Показано, что для практического использования номограммы потребуется получение минимально 10 успешных (исключающих артефакты) измерений АД при малой вариабельности его показателей или 25–30 измерений при высокой.

*Ключевые слова:* интеллектуальный анализ данных, диагностическая номограмма, гемодинамика.

*М. В. ВОИТИКОВА<sup>1</sup>, Р. В. ХУРСА<sup>2</sup>*

**DIAGNOSTICS OF LATENT HEMODYNAMICS BY DATA MINING:  
CONDITIONS OF PRACTICAL USE**

<sup>1</sup>*B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,  
e-mail: voitikova@imaph.bas-net.by*

<sup>2</sup>*Belarusian State Medical University, Minsk, Belarus, e-mail: rvkhursa@tut.by*

We proposed a diagnostic nomogram (map) for hemodynamic state classification, based on linear regression modeling of blood pressure (BP) parameters and Data Mining algorithm. Mapping the vector of the BP characteristics, which coordinates are the coefficients of linear regression of the systolic, diastolic on pulse pressure, the pathological changes of hemodynamics inherent in hypertension, prehypertension or clinically latent hemodynamic disturbances can be diagnosed. The normal physiology of cardiovascular interaction corresponds to the vector location within certain limits on the nomogram. We have investigated the factors influencing the accuracy of the diagnostics in a clinical setting.

*Keywords:* Data Mining, diagnostic nomogram, hemodynamics.

*А. М. ГОНЧАРЕНКО*

**О РАСПРОСТРАНЕНИИ СОЛИТОНОВ В ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ СЕЛФОКАХ**

*Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,  
e-mail: a.goncharenko@ifanbel.bas-net.by*

Исследованы особенности свойств солитонов в отрицательных селфоках. Показано, что солитон периодически изменяется с проникновением в отрицательную среду.

*Ключевые слова:* солитон, селфок, отрицательная среда, свойства.

*A. M. GONCHARENKO*

**PROPAGATION OF SOLITONS IN NEGATIVE SELFOCS**

*B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,  
e-mail: a.goncharenko@ifanbel.bas-net.by*

Some properties of solitons in negative selfocs are considered.

*Keywords:* soliton, selfoc, negative media, properties.