

ISSN 0002-3574 (print)

# ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬнай АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ

---

СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК НАВУК. 2016. № 4

---

# ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ

---

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК. 2016. № 4

---

Журнал основан в январе 1965 г.

Выходит четыре раза в год

Учредитель – Национальная академия наук Беларуси

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь,  
свидетельство о регистрации № 392 от 18.05.2009

*Входит в Перечень научных изданий Республики Беларусь  
для опубликования результатов диссертационных исследований,  
включен в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ)*

**Главный редактор**

**С. Я. Килин**

**Редакционная коллегия**

**Н. М. Олехнович** (заместитель главного редактора),

**В. А. Орлович** (заместитель главного редактора),

**Т. Е. Янчук** (ведущий редактор журнала)

**С. В. Абламейко, С. М. Абрамов** (Российская Федерация), **В. М. Анишик,**  
**А. И. Белоус, И. В. Гайшун, С. В. Гапоненко, А. М. Гончаренко, А. П. Достанко,**  
**Н. А. Изобов, Н. С. Казак, В. И. Корзюк, Ф. П. Коршунов,**  
**Ю. А. Курочкин, Н. А. Поклонский, С. А. Тихомиров,**  
**Л. М. Томильчик, А. В. Тузиков, Ю. С. Харин,**  
**А. Ф. Чернявский, Л. А. Янович, В. И. Янчевский**

**Редакционный совет**

**С. Я. Килин** (Республика Беларусь)  
**С. В. Абламейко** (Республика Беларусь)  
**Ж. И. Алферов** (Российская Федерация)  
**А. Л. Асеев** (Российская Федерация)  
**И. В. Гайшун** (Республика Беларусь)  
**А. М. Желтиков** (Российская Федерация)  
**В. В. Козлов** (Российская Федерация)  
**Г. Лейсх** (Федеративная Республика Германия)  
**Д. С. Могилевцев** (Республика Беларусь)  
**Й. Врахтруп** (Федеративная Республика Германия)  
**В. А. Орлович** (Республика Беларусь)  
**А. Цайлингер** (Австрийская Республика)

*Адрес редакции:*

*ул. Академическая, 1, к. 119, 220072, г. Минск, Республика Беларусь.  
Тел.: + 375 17 284-19-19; e-mail: fmvesti@mail.ru*

***vestifm.belnauka.by***

---

**ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ.**

Серия физико-математических наук. 2016. № 4.

*Выходит на русском, белорусском и английском языках*

---

Редактор *Т. Е. Янчук*

Компьютерная вёрстка *О. Л. Смольской*

Подписано в печать 15.12.2016. Выход в свет 28.12.2016. Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>8</sub>. Бумага офсетная.

Печать цифровая. Усл. печ. л. 14,88. Уч.-изд. л. 16,4. Тираж 68 экз. Заказ 246.

Цена: индивидуальная подписка – 10,28 руб., ведомственная подписка – 25,21 руб.

Издатель и полиграфическое исполнение:

Республиканское унитарное предприятие «Издательский дом «Беларуская навука».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/18 от 02.08.2013. ЛП № 02330/455 от 30.12.2013. Ул. Ф. Скорины, 40, 220141, г. Минск, Республика Беларусь

© РУП «Издательский дом «Беларуская навука»,  
Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук, 2016

# PROCEEDINGS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

---

PHYSIC AND MATHEMATICS SERIES, 2016, no. 4

---

The Journal was founded in January 1965

Periodicity is 4 issues per annum

Founder is the National Academy of Sciences of Belarus

The journal is registered on May 18, 2009 by the Ministry of Information of the Republic of Belarus  
in the State Registry of Mass Media, reg. no. 392

*The Journal is included in The List of Journals for Publication  
of the Results of Dissertation Research in the Republic of Belarus  
and in the database of Russian Science Citation Index (RSCI)*

**Editor-in-Chief**

**S. Ya. Kilin**

**Editorial Board**

**N. M. Olekhovich** (*Associate Editor-in-Chief*)

**V. A. Orlovich** (*Associate Editor-in-Chief*)

**T. E. Yanchuk** (*lead editor*)

**S. V. Ablameyko, S. M. Abramov** (Russian Federation), **V. M. Anishik, A. I. Belous,**  
**I. V. Gaishun, S. V. Gaponenko, A. M. Goncharenko, A. P. Dostanko,**  
**N. A. Izobov, N. S. Kazak, V. I. Korzyuk, F. P. Korshunov,**  
**Yu. A. Kurochkin, N. A. Poklonskii, S. A. Tikhomirov, L. M. Tomil'chik,**  
**A. V. Tuzikov, Yu. S. Kharin, A. F. Chernyavskii,**  
**L. A. Yanovich, V. I. Yanchevskii**

**Editorial Council**

**S. Ya. Kilin** (Republic of Belarus)

**S. V. Ablameyko** (Republic of Belarus)

**Z. I. Alferov** (Russian Federation)

**A. L. Aseev** (Russian Federation)

**I. V. Gaishun** (Republic of Belarus)

**A. M. Zheltikov** (Russian Federation)

**V. V. Kozlov** (Russian Federation)

**G. Leuchs** (Federal Republic of Germany)

**D. S. Mogilevtsev** (Republic of Belarus)

**J. Wrachtrup** (Federal Republic of Germany)

**V. A. Orlovich** (Republic of Belarus)

**A. Zeilinger** (Republic of Austria)

*Address of the Editorial Office:*  
*Akademicheskaya Str., room 119, 220072, Minsk, Republic of Belarus.*  
*Tel.: + 375 17 284-19-19; e-mail: fmvesti@mail.ru*  
**vestifm.belnauka.by**

---

PROCEEDING OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS.

Physic and Mathematics series, 2016, no. 4.

*Printed in Russian, Belarusian and English languages*

---

Editor *T. E. Yanchuk*  
Computer imposition *O. L. Smolskaya*

It is sent of the press 15.12.2016. Appearance 28.12.2016. Format 60×84<sup>1</sup>/<sub>8</sub>. Offset paper.  
The press digital. Printed pages 14,88. Publisher's signatures 16,4. Circulation 68 copies. Order 246.  
Price: individual subscription – 10,28 byn., departmental subscription – 25,21 byn.

Publisher and printing execution:

Republican unitary enterprise "Publishing House "Belaruskaya Navuka".  
Certificate on the state registration of the publisher, manufacturer, distributor of printing editions  
No. 1/18 dated August 2, 2013. License for the press no. 02330/455 dated December 30, 2013.  
Address: F. Scorina Str., 40, 220141, Minsk, Republic of Belarus.

© RUE "Publishing House "Belaruskaya Navuka",  
Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physic and Mathematics series, 2016

## **СОДЕРЖАНИЕ**

### **МАТЕМАТИКА**

<b>Гринь А. А., Кузьмич А. В.</b> Точные оценки числа предельных циклов автономных систем с тремя точками покоя на плоскости .....	7
<b>Воробьев Н. Н., Кузнецова А. Р.</b> Об индуктивных решетках насыщенных формаций .....	18
<b>Муха В. С.</b> Симметричная аппроксимация векторных статистических данных линейными многообразиями .....	23
<b>Малютин В. Б.</b> Вычисление функциональных интегралов с помощью последовательностей Штурма .....	32
<b>Во Тхи Ким Туен.</b> Монотонные разностные схемы для модели Шнэкенберг .....	38
<b>Ле Минь Хиену.</b> Безусловно монотонные разностные схемы второго порядка аппроксимации на равномерных сетках для Гамма-уравнения .....	47
<b>Каянович С. С.</b> Краевая задача для стержневого течения в канале .....	55

### **ФИЗИКА**

<b>Станчик А. В., Барайшук С. М., Башкиров С. А., Гременок В. Ф., Тиванов М. С., Дергачева М. Б., Уразов К. А.</b> Исследование тонких пленок $Cu_2ZnSnSe_4$ методом атомно-силовой микроскопии .....	67
<b>Гуртовой В. Г., Шелег А. У.</b> Изменение диэлектрических свойств монокристаллов $Cu_2ZnSnS_4$ под действием электронного облучения .....	76
<b>Попов И. А., Щелчков А. В., Скрыпник А. Н., Зубков Н. Н., Жукова Ю. В., Чорный А. Д., Сверчков С. А.</b> Численное и экспериментальное исследование гидравлического сопротивления труб с внутренним спиральным оребрением, нанесенным методом деформирующего резания .....	82
<b>Шапошников В. Л., Кривошеева А. В., Борисенко В. Е.</b> Компьютерное моделирование энергетических зон и оптических параметров дихалькогенидов олова .....	90
<b>Замковец А. Д., Понявина А. Н., Баран Л. В.</b> Плазмонный резонанс в планарных слоистых наноструктурах серебро-фталоцианин никеля .....	98

### **ИНФОРМАТИКА**

<b>Гущинский Н. Н., Баттайа О., Долгий А.</b> К оптимизации процессов последовательной обработки партий деталей .....	106
---	-----

### **КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ**

<b>Юрчук Н. И., Новиков Е. Н.</b> Необходимые условия для существования классических решений уравнения колебаний полуограниченной струны .....	116
Перечень статей, опубликованных в журнале «Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук» в 2016 году .....	121

**CONTENTS****MATHEMATICS**

<b>Grin A. A., Kuzmich A. V.</b> Precise estimation of limit cycles numbers of autonomous systems with three equilibrium points in the plane .....	7
<b>Vorob'ev N. N., Kuznetsova A. R.</b> On inductive lattices of saturated formations .....	18
<b>Mukha V. S.</b> Symmetric approximation of vector statistical data by linear varieties .....	23
<b>Malyutin V. B.</b> Evaluation of functional integrals using Sturm sequences .....	32
<b>Vo Thi Kim Tuyen.</b> Monotone difference schemes for the Schnackenberg model .....	38
<b>Le Minh Hieu.</b> Unconditionally monotone finite difference scheme of the second-order approximation on uniform grids for the Gamma equation.....	47
<b>Kayanovich S. S.</b> Boundary-value problem for plug flow in the channel .....	55

**PHYSICS**

<b>Stanchik A. V., Barajshuk S. M., Bashkirov S. A., Gremenok V. F., Tivanov M. S., Dergacheva M. B., Urazov K. A.</b> Investigation of $\text{Cu}_2\text{ZnSnSe}_4$ thin films by atomic force microscopy .....	67
<b>Hurtavy V. G., Sheleg A. U.</b> Change in the $\text{Cu}_2\text{ZnSnS}_4$ single crystals dielectric properties induced by electron irradiation .....	76
<b>Popov I. A., Shchelchko A. V., Skrypnik A. N., Zubkov N. N., Zhukova Yu. V., Chorny A. D., Sverchkov S. A.</b> Numerical and experimental study of hydraulic resistance of tubes with internal helical finning by deforming cutting .....	82
<b>Shaposhnikov V. L., Krivosheeva A. V., Borisenko V. E.</b> Computer simulation of energetic bands and optical parameters of tin dichalcogenides .....	90
<b>Zamkovets D., Ponyavina A. N., Baran L. V.</b> Plasmon resonance in the planar layered silver-nickel phthalocyanine nanostructures .....	98

**INFORMATICS**

<b>Guschinsky N. N., Battaia O., Dolgui A.</b> On optimization of processes for sequential batch machining .....	106
--	-----

**SHORT COMMUNICATIONS**

<b>Yurchuk N. I., Novikov E. N.</b> Necessary conditions for existence of classical solutions to the equation of semi-bounded string vibration .....	116
List of Publications for 2016 in "Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series" .....	124

А. А. Гринь, А. В. Кузьмич

Гродненский государственный университет им. Янки Купалы, Гродно, Беларусь

## ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ЧИСЛА ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С ТРЕМЯ ТОЧКАМИ ПОКОЯ НА ПЛОСКОСТИ

Для автономных систем с гладкими правыми частями рассматривается задача точной нелокальной оценки числа предельных циклов в односвязной области вещественной фазовой плоскости, содержащей три простые точки покоя с суммарным индексом Пуанкаре +1. Для решения указанной задачи последовательно строятся две функции Дюлака – Черкаса, с помощью которых находятся замкнутые трансверсальные кривые, разбивающие односвязную область на односвязные, двусвязные и, возможно, одну трехсвязную подобласть. Эффективность разработанного подхода продемонстрирована на примерах полиномиальных систем Льенара, для которых доказано существование в каждой из двусвязных подобластей точно одного предельного цикла, в трехсвязной – точно двух предельных циклов. Установлены конфигурации этих предельных циклов. Полученные результаты могут быть применены в качественной теории и теории бифуркаций обыкновенных дифференциальных уравнений, а также в теории нелинейных колебаний.

*Ключевые слова:* система Льенара, функция Дюлака – Черкаса, 16-я проблема Гильберта, предельный цикл.

A. A. Grin, A. V. Kuzmich

Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus

## PRECISE ESTIMATIONS OF LIMIT CYCLES NUMBER OF AUTONOMOUS SYSTEMS WITH THREE EQUILIBRIUM POINTS IN THE PLANE

For autonomous systems with smooth right sides the problem of precise non-local estimation of the limit cycles number is considered in a simply-connected domain of a real phase plane containing three equilibrium points with a total Poincaré index +1. To solve this problem, we are constructing successively two Dulac-Cherkas functions which provide the closed transversal curves decomposing the simply-connected domain in simply-connected subdomains, doubly-connected subdomains, and possibly a three-connected subdomain. The efficiency of the developed approach is demonstrated by the examples of the polynomial Liénard systems, for which it is proved that there exist a limit cycle in each of the doubly-connected subdomains and two limit cycles in the three-connected subdomain. We determine the configurations of these limit cycles. The obtained results can be applied in the qualitative theory and in the theory of bifurcations of ordinary differential equations, as well as in the theory of nonlinear oscillations.

*Keywords:* Liénard system, Dulac-Cherkas function, 16<sup>th</sup> Hilbert problem, limit cycle.

Н. Н. Воробьев, А. Р. Кузнецова

Витебский государственный университет им. П. М. Машерова, Витебск, Беларусь

## ОБ ИНДУКТИВНЫХ РИШЕТКАХ НАСЫЩЕННЫХ ФОРМАЦИЙ

Все рассматриваемые группы конечны. Символом  $F_p(G)$  обозначают наибольшую нормальную  $p$ -нильпотентную подгруппу группы  $G$ , а символом  $\pi(G)$  – множество всех различных простых делителей порядка группы  $G$ . Функции  $f: \mathbb{P} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$  сопоставляют класс групп  $LF(f) = \{G \mid G/F_p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \pi(G)\}$ . Если формация  $\mathfrak{F}$  такова, что  $\mathfrak{F} = LF(f)$  для некоторой функции  $f$ , то  $\mathfrak{F}$  называют насыщенной формацией с локальным спутником  $f$ . Пусть  $\mathfrak{F}$  – насыщенная формация. Символом  $\mathfrak{F} / \mathfrak{N}$  обозначают полную решетку всех насыщенных формаций, заключенных между  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{N}$ , где  $\mathfrak{N}$  – класс всех nilпотентных групп. Для произвольной полной решетки формаций  $\Theta$  символом  $\Theta'$  обозначается полная решетка всех таких формаций, которые обладают локальным  $\Theta$ -значным спутником. Спутник  $f$  называется  $\Theta$ -значным, если все его значения принадлежат  $\Theta$ .

Пусть  $\Theta$  – полная решетка формаций. Тогда верхняя грань произвольной совокупности  $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$  элементов из  $\Theta'$  обозначается через  $\vee_{\Theta'}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$ . Решетка  $\Theta'$  называется индуктивной (см. Скиба А. Н. Алгебра формаций. Минск: Беларус. навука, 1997), если для любого набора  $\{\mathfrak{F}_i = LF(f_i) \mid i \in I\}$  формаций  $\mathfrak{F}_i \in \Theta'$  и для всякого такого набора  $\{f_i \mid i \in I\}$   $\Theta$ -значных спутников  $f_i$ , где  $f_i$  – некоторый внутренний спутник формации  $\mathfrak{F}_i$ , имеет место  $\vee_{\Theta'}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = LF(\vee_{\Theta}(f_i \mid i \in I))$ , где символ  $\vee_{\Theta}(f_i \mid i \in I)$  обозначает такой спутник  $f$ , что  $f(p)$  является верхней гранью для  $\{f_i(p) \mid i \in I\}$  в  $\Theta$ , если  $\bigcup_{i \in I} f_i(p) \neq \emptyset$ , и  $f(p) = \emptyset$  в противном случае. В настоящей работе доказана следующая

*Теорема.* Пусть  $\mathfrak{F}$  – насыщенная формация. Тогда решетка  $\mathfrak{F} / \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}$  индуктивна.

*Ключевые слова:* формация, полная решетка формаций, решетка насыщенных формаций, индуктивная решетка формаций.

ON INDUCTIVE LATTICES OF SATURATED FORMATIONS

All groups considered are finite. The symbol  $F_p(G)$  denotes the  $p$ -nilpotent radical of a group  $G$ ;  $\pi(G)$  is the set of primes dividing the order of  $G$ . Let  $f$  be a function of the form

$$f: \mathbb{P} \rightarrow \{\text{formations of groups}\}. \tag{*}$$

We consider the class of groups  $LF(f) = \{G \mid G/F_p(G) \in f(p) \text{ for all } p \in \pi(G)\}$ . If  $\mathfrak{F}$  is a formation such that  $\mathfrak{F} = LF(f)$  for a function  $f$  of the form (\*), then  $\mathfrak{F}$  is said to be saturated and  $f$  is said to be a local satellite of  $\mathfrak{F}$ . Let  $\mathfrak{S}$  be a saturated formation. We write  $\mathfrak{S} / \mathfrak{S} \cap \mathfrak{N}$  to denote the lattice of all saturated formations lying between  $\mathfrak{S}$  and  $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{N}$ , where  $\mathfrak{N}$  is the class of all nilpotent groups.

Let  $\Theta$  be a complete lattice of formations. Then we denote by  $\Theta'$  the set of all formations having a local  $\Theta$ -valued satellite. A satellite  $f$  is called  $\Theta$ -valued if all values of  $f$  belong to  $\Theta$ . Let  $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S} \in \Theta$  be a collection of group. We write  $\Theta\text{form}\mathfrak{X}$  to denote the intersection of all formations of  $\Theta$  containing all groups of  $\mathfrak{X}$ . Let  $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$  be an arbitrary collection of formations in  $\Theta$ . We denote

$$\vee_{\Theta}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \Theta\text{form}\left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i\right).$$

Let  $\{f_i \mid i \in I\}$  be a collection of  $\Theta$ -valued satellites. Then  $\vee_{\Theta}(f_i \mid i \in I)$  denotes the satellite  $f$  such that

$$f(p) = \Theta\text{form}\left(\bigcup_{i \in I} f_i(p)\right)$$

for every  $p \in \mathbb{P}$ .

A complete lattice  $\Theta'$  is called inductive (see Skiba A. N. Algebra formacij [Algebra of Formations]. Minsk, Belaruskaja navuka Publ., 1997) if for any collection  $\{\mathfrak{F}_i = LF(f_i) \mid i \in I\}$ , where  $f_i$  is an integrated satellite of  $\mathfrak{F}_i \in \Theta'$ , the following equality holds:  $\vee_{\Theta'}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = LF(\vee_{\Theta}(f_i \mid i \in I))$ . In this paper, we prove the following

**Theorem.** *Let  $\mathfrak{S}$  be a saturated formation. Then the lattice  $\mathfrak{S} / \mathfrak{S} \cap \mathfrak{N}$  is inductive.*

**Keywords:** formation, complete lattice of formations, lattice of saturated formations, inductive lattice of formations.

**V. С. Myxa**

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь*

**СИММЕТРИЧНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ВЕКТОРНЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ ЛИНЕЙНЫМИ МНОГООБРАЗИЯМИ**

Рассматривается задача линейной аппроксимации векторных статистических данных. Как известно, классическая линейная функция регрессии минимизирует сумму квадратов вертикальных расстояний от системы точек до аппроксимирующей плоскости. В данной статье рассматривается иной подход к аппроксимации, когда минимизируется сумма квадратов перпендикулярных расстояний от системы точек до плоскости. Такая аппроксимация названа симметричной. Получены формулы аппроксимирующих линейных многообразий в параметрической форме. Решение задачи выполнено в векторно-матричной форме. Приведены численные примеры и их графические иллюстрации в сравнении с известными результатами из литературы и классического линейного регрессионного анализа.

**Ключевые слова:** аппроксимация, векторные статистические данные, линейные многообразия, линейный регрессионный анализ, компьютерный анализ данных.

**V. S. Mukha**

*Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus*

**SYMMETRIC APPROXIMATION OF VECTOR STATISTICAL DATA BY LINEAR VARIETIES**

The problem of the approximation of vector statistical data is considered. As it is known the classical linear regression function minimizes the sum of squares of the vertical distances from the system of points to the approximating plane. The problem in this case consists of choos the parameters  $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}$  of linear function  $x_m = c_0 + c_1x_1 + \dots + c_{m-1}x_{m-1}$  from the condition

$$\sum_{i=1}^n (x_{m,i} - c_0 - c_1x_{1,i} - \dots - c_{m-1}x_{m-1,i})^2 \rightarrow \min_{c_0, c_1, \dots, c_{m-1}},$$

where  $x_{m,i}, i = \overline{1, n}$ , are the observations of endogenous component  $\xi_m$  of random vector  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$  and  $n$  is the size of the sample. In this article, another approach to the approximation is considered when the sum of squares of the perpendicular distances from the system of points  $X_i = (x_{1,i}, \dots, x_{m,i}) \in E^m, i = \overline{1, n}$ , to the plane  $x_m = c_0 + c_1x_1 + \dots + c_{m-1}x_{m-1}$  is minimized. Such an approximation was called as symmetric approximation of vector statistical data. We solve the problem in more general form. We look for the linear variety in  $E^m$  ( $(m - r)$ -dimensional plane) in parametric form

$$X = C_0 + t_1C_1 + \dots + t_{m-r}C_{m-r} \in E^m, \quad 1 \leq r \leq m, \quad t_0 = 1,$$

where  $C_0, C_1, \dots, C_{m-r}$  are the unknown linear independent vectors in  $E^m, t_1, \dots, t_{m-r}$  are the scalar real parameters,  $E^m$  is the  $m$ -dimensional Euclidean space. This variety can be presented in form of vector-vector linear dependence

$$X_r = A + B X_{m-r},$$

where  $X_r^T = (x_{m-r+1}, x_{m-r+2}, \dots, x_m), X_{m-r}^T = (x_1, x_2, \dots, x_{m-r}), B$  is the  $(r \times (m - r))$ -matrix. We give the solution in vector-matrix form and the numerical examples compared with the known results from literature and the classical linear regression analysis.

**Keywords:** approximation, vector statistical data, linear varieties, linear regression analysis, computer data analysis.

**В. Б. Малютин**

*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь*

## **ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ С ПОМОЩЬЮ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ШТУРМА**

Данная работа касается двух направлений теории функционального интегрирования: представления физических величин, в частности ядра оператора эволюции, в виде функциональных интегралов и методов вычисления функциональных интегралов. Предложен новый метод приближенного вычисления функциональных интегралов по условной мере Винера, который основывается на использовании формулы Фейнмана – Каца, дающей интегральное представление для ядра оператора эволюции, и на представлении ядра с помощью собственных значений и собственных векторов оператора. Предлагаемый подход эффективен при вычислении функциональных интегралов по пространству функций, заданных на отрезках большой длины.

*Ключевые слова:* функциональные интегралы, формула Фейнмана – Каца, ядро оператора эволюции, последовательность Штурма.

**V. B. Malyutin**

*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*

## **EVALUATION OF FUNCTIONAL INTEGRALS USING STURM SEQUENCES**

The present work deals with two directions of the theory of functional integration. The first is the representation of physical quantities, in particular the evolution operator kernel in the form of functional integrals. The second is concerned with the methods for calculation of functional integrals. A new method for approximate evaluation of functional integrals with respect the conditional Wiener measure is proposed in this work. This method is based both on the use of the Feynman – Kac formula giving the integral representation of the evolution operator kernel and on the representation of the kernel using eigenvalues and eigenvectors of operator. The proposed method is effective for calculation of functional integrals over a space of functions defined on the intervals of large length.

*Keywords:* functional integrals, Feynman – Kac formula, evolution operator kernel, Sturm sequences.

**Во Тхи Ким Туен**

*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь  
Хюэский промышленный колледж, Хюэ, Вьетнам*

## **МОНОТОННЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ МОДЕЛИ ШНЭКЕНБЕРГ**

В настоящей работе построена каноническая форма векторно-разностных схем. Дано определение монотонности таких разностных схем, связанное со свойством положительности разностного решения. На основе этого определения построены монотонные разностные схемы для модели Шнэкенберг с граничными условиями Дирихле и Неймана. Эта модель представляет собой полунелинейную реакционно-диффузную систему и играет важную роль при математическом моделировании в областях физической химии и биологии. При построении монотонной разностной схемы для указанной модели с граничным условием Неймана основная идея состоит в том, чтобы использовать полные узлы в граничных точках задания краевых условий второго рода. Представлены результаты вычислительных экспериментов, подтверждающих эффективность предложенных методов. Численное решение получено без нефизических осцилляций.

*Ключевые слова:* модель Шнэкенберг, монотонная разностная схема.

**Vo Thi Kim Tuyen**

*Belarusian State University, Minsk, Belarus  
Hue Industrial College, Hue, Vietnam*

## **MONOTONE DIFFERENCE SCHEMES FOR THE SCHNACKENBERG MODEL**

In this article the canonical form of the vector-difference schemes is constructed. The definition of the monotonicity of difference schemes is given. This definition is related to the positivity property of the difference solution. Based on this definition, the monotone difference schemes for the Schnackenberg model with the Dirichlet and Neumann boundary conditions are constructed. This model is a semi-nonlinear reaction-diffusion system, and it plays an important role in mathematical modeling in the fields of physical chemistry and biology. In constructing a monotone difference scheme for this model with the Neumann boundary condition, the idea of half-integral nodes at the boundary points under the second-kind boundary conditions is used. The results of numerical experiments have confirmed the effectiveness of the suggested methods. The numerical solution without nonphysical oscillation is obtained.

*Keywords:* Schnackenberg model, monotone difference scheme.

Ле Минь Хиеу

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь  
Экономический университет – Университет Дананга, Дананг, Вьетнам

## БЕЗУСЛОВНО МОНОТОННЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ НА РАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ ДЛЯ ГАММА-УРАВНЕНИЯ

В настоящей работе рассмотрена начально-краевая задача для так называемого Гамма-уравнения, которое может быть получено преобразованием нелинейного уравнения Блэка – Шоулза для опционной цены в квазилинейное параболическое уравнение для второй производной опционной цены, и получены двусторонние оценки для его точного решения. На основании принципа регуляризации полученные ранее результаты обобщаются на построение безусловно монотонных разностных схем (принцип максимума выполнен без ограничений на соотношения между коэффициентами и параметрами сетки) второго порядка локальной аппроксимации на равномерных сетках для данного уравнения. С помощью разностного принципа максимума получены двусторонние оценки для разностного решения при произвольных незнакомостоянных входных данных задачи. Доказана априорная оценка в норме  $C$ . Отметим, что доказанные двусторонние оценки разностного решения полностью согласованы с дифференциальной задачей и максимальное и минимальное значения разностного решения не зависят от коэффициентов диффузии и конвекции. Приведенные в работе вычислительные эксперименты подтверждают теоретические выводы.

*Ключевые слова:* Гамма-уравнение, принцип максимума, двусторонние оценки, монотонная разностная схема, квазилинейное параболическое уравнение.

Le Minh Hieu

Belarusian State University, Minsk, Belarus  
University of Economics – University of Da Nang, Da Nang, Vietnam

## UNCONDITIONALLY MONOTONE FINITE DIFFERENCE SCHEME OF THE SECOND-ORDER APPROXIMATION ON UNIFORM GRIDS FOR THE GAMMA EQUATION

In this article we consider the initial boundary-value problem for the so-called Gamma equation, which can be derived by transforming the nonlinear Black – Scholes equation for option price into a quasi-linear parabolic equation for the second derivative of option price, and for its exact solution the two-side estimates are obtained. By means of the regularization principle, the previous results are generalized to construct an unconditionally monotone finite-difference scheme (the maximum principle is satisfied without limitations on the relations between the coefficients and the grid parameters) of second-order approximation on uniform grids for this equation. With the help of the difference maximum principle, the two-side estimates for a difference solution are obtained using the arbitrary non-sign-constant input data of the problem. The *a priori* estimate in the maximum norm  $C$  is proved. It is interesting to note that the proven two-side estimates for the difference solution are fully consistent with the differential problem, and the maximal and minimal values of the difference solution do not depend on the diffusion and convection coefficients. Computational experiments confirming the theoretical conclusions are given.

*Keywords:* Gamma equation, maximum principle, two-side estimates, monotone finite-difference scheme, quasi-linear parabolic equation.

С. С. Каянович

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь,

## КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СТЕРЖНЕВОГО ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛЕ

В статье [1] доказано существование решений модели стержневого течения на каждом временном слое  $t_m = m\tau$ ,  $m = 0, 1, \dots, M$ . В данной работе получены априорные оценки этих решений, которые не зависят от  $\tau$  и позволяют выполнить предельный переход при  $\tau \rightarrow 0$ .

*Ключевые слова:* разрешимость, предельный переход, априорные оценки, гладкость, срезающая функция.

S. S. Kayanovich

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus,

## BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR PLUG FLOW IN THE CHANNEL

In the article [1], we have proved the existence of solutions for a model of plug flow at each time step  $t_m = m\tau$ ,  $m = 0, 1, \dots, M$ . In this article, *a priori* estimates of these solutions have been obtained, which do not depend on  $\tau$  and allow passing to the limit as  $\tau \rightarrow 0$ .

*Keywords:* solvability, passage to the limit, *a priori* estimates, smoothness, cut-off function.

**А. В. Станчик<sup>1</sup>, С. М. Барайшук<sup>2</sup>, С. А. Башкиров<sup>1</sup>, В. Ф. Гременок<sup>1</sup>,  
М. С. Тиванов<sup>3</sup>, М. Б. Дергачева<sup>4</sup>, К. А. Уразов<sup>4,5</sup>**

<sup>1</sup>Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению, Минск, Беларусь

<sup>2</sup>Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск, Беларусь

<sup>3</sup>Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

<sup>4</sup>Институт топлива, катализа и электрохимии им. Д. В. Сокольского, Алматы, Казахстан

<sup>5</sup>Казахстанско-Британский технический университет, Алматы, Казахстан

## **ИССЛЕДОВАНИЕ ТОНКИХ ПЛЕНОК $\text{Cu}_2\text{ZnSnSe}_4$ МЕТОДОМ АТОМНО-СИЛОВОЙ МИКРОСКОПИИ**

Методом атомно-силовой микроскопии исследовано влияние типа подложки на структуру и шероховатость поверхности пленок  $\text{Cu}_2\text{ZnSnSe}_4$ , полученных методом селенизации металлических прекурсоров Cu-Zn-Sn на подложках из стекла с подслоем молибдена и молибденовой фольги (Mo/стекло, Mo-фольга). Обнаружено, что пленки  $\text{Cu}_2\text{ZnSnSe}_4$  на подложках Mo/стекло и Mo-фольга имеют близкие значения шероховатости и зернистую структуру. Пленки  $\text{Cu}_2\text{ZnSnSe}_4$  имеют более высокие значения шероховатости и максимальной высоты неровности профиля, чем металлические прекурсоры Cu-Zn-Sn. Увеличение шероховатости при формировании пленок  $\text{Cu}_2\text{ZnSnSe}_4$  из прекурсоров происходит за счет роста зерен в процессе отжига и селенизации.

*Ключевые слова:*  $\text{Cu}_2\text{ZnSnSe}_4$ , тонкие пленки, прекурсоры, электрохимическое осаждение, гибкие подложки, атомно-силовая микроскопия.

**A. V. Stanchik<sup>1</sup>, S. M. Barajshuk<sup>2</sup>, S. A. Bashkirov<sup>1</sup>, V. F. Gremenok<sup>1</sup>, M. S. Tivanov<sup>3</sup>, M. B. Dergacheva<sup>4</sup>, K. A. Urazov<sup>4,5</sup>**

<sup>1</sup>Scientific-Practical Materials Research Centre of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

<sup>2</sup>Belarusian State Agrarian Technical University, Minsk, Belarus

<sup>3</sup>Belarusian State University, Minsk, Belarus

<sup>4</sup>Sokolsky Institute of Fuel, Catalysis and Electrochemistry, Almaty, Kazakhstan

<sup>5</sup>Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan

## **INVESTIGATION OF $\text{Cu}_2\text{ZnSnSe}_4$ THIN FILMS BY ATOMIC FORCE MICROSCOPY**

In comparison to the traditional use of glass substrates, the thin films onto metal substrates offer improved device coating, economical large-scale roll-to-roll processing, and applicability in lightweight, as well as flexible products. However, unlike glass, metal foils tend to exhibit rough surfaces. This article studies the substrate-type (Mo/glass and Mo-foil) effect on the topographic characteristics of the  $\text{Cu}_2\text{ZnSnSe}_4$  films by atomic force microscopy (AFM).  $\text{Cu}_2\text{ZnSnSe}_4$  thin films were prepared by the electrodeposition of stack copper/tin/copper/zinc (Cu/Sn/Cu/Zn) precursors, followed by selenization. AFM was used to study the topographic characteristics of thin films, including grain size, surface roughness, and maximum height of the profile. It is shown that the films obtained on Mo/glass and Mo-foil substrates have similar roughness and in the both cases the grain structure is formed. The  $\text{Cu}_2\text{ZnSnSe}_4$  thin films show relatively high surface roughness and maximum roughness profile height compared to Cu-Zn-Sn precursors. The increase in the surface roughness of the films was caused by the growth of grains during annealing and selenization processes.

*Keywords:*  $\text{Cu}_2\text{ZnSnSe}_4$ , thin films, precursors, electrochemical deposition, flexible substrate, atomic force microscopy.

**В. Г. Гуртовой, А. У. Шелег**

*Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению,  
Минск, Беларусь*

## **ИЗМЕНЕНИЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МОНОКРИСТАЛЛОВ $\text{Cu}_2\text{ZnSnS}_4$ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЭЛЕКТРОННОГО ОБЛУЧЕНИЯ**

В интервале температур 100–300 К на частотах измерительного поля  $10^3$ – $10^6$  Гц проведены исследования электропроводности и диэлектрической проницаемости монокристаллов  $\text{Cu}_2\text{ZnSnS}_4$ , как необлученных, так и облученных электронами с энергией 4 МэВ дозами  $10^{15}$  и  $10^{16}$  см<sup>-2</sup>. Показано, что абсолютные значения изученных характеристик возрастают при увеличении температуры. На кривых  $\sigma = f(T)$  обнаружены участки с разным наклоном, что свидетельствует о наличии нескольких типов проводимости в исследованных полупроводниках. Выявлена дисперсия диэлектрических свойств исследованных монокристаллов: с ростом частоты значения диэлектрической проницаемости уменьшаются, а удельной электропроводности – увеличиваются. Обнаружено существенное влияние облучения электронами на электропроводность и диэлектрическую проницаемость исследованных монокристаллов. Увеличение дозы облучения приводит к уменьшению диэлектрической проницаемости и значительному возрастанию электропроводности во всей исследованной области температур.

*Ключевые слова:* четверные полупроводники, диэлектрическая проницаемость, удельная электропроводность, электронное облучение, дисперсия, низкотемпературные исследования.

### CHANGE IN THE $\text{Cu}_2\text{ZnSnS}_4$ SINGLE CRYSTALS DIELECTRIC PROPERTIES INDUCED BY ELECTRON IRRADIATION

The quaternary compound  $\text{Cu}_2\text{ZnSnS}_4$  was synthesized by the one-temperature method from the elementary components. Single crystals of  $\text{Cu}_2\text{ZnSnS}_4$  were grown by chemical gas-transmission. Samples were prepared in the form of plane single-crystal plates with a size of more than  $2 \times 5 \times 0.5$  mm. The electrical conductivity and dielectric properties of  $\text{Cu}_2\text{ZnSnS}_4$  single crystals are investigated in the temperature range 100–300 K at the measuring field frequencies of  $10^3$ – $10^6$  Hz. Non-irradiated samples and those irradiated by electrons with an energy of 4 MeV and doses of  $10^{15}$  and  $10^{16}$  cm<sup>-2</sup> are studied. It is shown that the absolute values of the studied characteristics increase with temperature. The curves  $\sigma = f(T)$  have the areas with different slopes, which indicates the presence of several types of conduction in the investigated semiconductors. The dispersion of the dielectric properties of the studied single crystals is revealed: as the frequency is increased, dielectric constant values decrease and, as electrical conductivity is increased, these values grow. Increasing the radiation decreases dielectric permittivity and causes a significant growth of electrical conductivity in the entire investigated temperature range.

*Keywords:* quaternary semiconductors, dielectric constant, electrical conductivity, electron irradiation, low-temperature investigations.

I. A. Popov<sup>1</sup>, A. V. Shchelchikov<sup>1</sup>, A. N. Skrypnik<sup>1</sup>, N. N. Zubkov<sup>2</sup>,  
Yu. V. Zhukova<sup>3</sup>, A. D. Chorny<sup>3</sup>, S. A. Sverchikov<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev, Kazan, Russia

<sup>2</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

<sup>3</sup>A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

### NUMERICAL AND EXPERIMENTAL STUDY OF HYDRAULIC RESISTANCE OF TUBES WITH INTERNAL HELICAL FINNING BY DEFORMING CUTTING

An object of investigation is a tube having helical fins on the internal surface and different geometric sizes. Investigation methods: experiments to obtain quantitative results hydraulic resistance of tubes with internal helical finning and to verify computational algorithm; numerical simulation to visualize the flow structure in the tube. Studies of hydraulic resistance of tubes with internal helical finning over a wide range of operating and geometric parameters were made:  $Re_D = 2 \cdot 10^3 \dots 2.5 \cdot 10^5$ , under the variation of the angle of swirling  $\alpha = 14$ – $87^\circ$ , the relative height of a protrusion  $h/d = (25$ – $87.5) \cdot 10^{-3}$ , the relative axial pitch  $p/d = 0.16$ – $12.73$ . It is revealed that the hydraulic resistance of tubes with helical finning increases by a factor of 1.1 to 11.7. The numerical simulation results showed that, as the angle of helical swirling is increased, in the near-wall layers the share of the circumferential velocity component increases and the share of the longitudinal component decreases. And since the finning height exceeds the boundary layer thickness, the hydraulic resistance grows.

*Keywords:* turbulence, hydraulic resistance, experiment, numerical simulation, tube, deforming cutting

И. А. Попов<sup>1</sup>, А. В. Щелчков<sup>1</sup>, А. Н. Скрыпник<sup>1</sup>, Н. Н. Зубков<sup>2</sup>,  
Ю. В. Жукова<sup>3</sup>, А. Д. Чорный<sup>3</sup>, С. А. Сверчков<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева, Казань, Россия

<sup>2</sup>Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия

<sup>3</sup>Институт тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

### ЧИСЛЕННОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ТРУБ С ВНУТРЕННИМ СПИРАЛЬНЫМ ОРЕБРЕНИЕМ, НАНЕСЕННЫМ МЕТОДОМ ДЕФОРМИРУЮЩЕГО РЕЗАНИЯ

В данной работе объектом исследования являются трубы с внутренним спиральным оребрением с различными геометрическими размерами. Методы исследования: эксперимент – для получения количественных результатов по гидравлическому сопротивлению труб с внутренним спиральным оребрением и для верификации расчетного алгоритма; численное моделирование – для визуализации структуры течения в трубе. Изучено гидравлическое сопротивление труб с внутренним спиральным оребрением в широком диапазоне режимных и конструктивных параметров:  $Re_D = 2 \cdot 10^3 \dots 2,5 \cdot 10^5$ , при изменении угла закрутки  $\alpha = 14$ – $87^\circ$ , относительной высоты выступов  $h/d = (25$ – $87,5) \cdot 10^{-3}$ , относительного шага по оси  $p/d = 0,16$ – $12,73$ . Выявлено увеличение гидравлического сопротивления труб с внутренним спиральным оребрением от 1,1 до 11,7 раза. Результаты проведенного численного моделирования показали, что с увеличением угла спиральной закрутки в пристеночных слоях доля окружной составляющей скорости увеличивается, а доля продольной составляющей скорости уменьшается. Так как высота оребрения превышает толщину пограничного слоя, то в результате растет гидравлическое сопротивление.

*Ключевые слова:* турбулентность, гидравлическое сопротивление, эксперимент, численное моделирование, труба, метод деформирующего резания.

**В. Л. Шапошников, А. В. Кривошеева, В. Е. Борисенко**

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь*

## **КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЗОН И ОПТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ДИХАЛЬКОГЕНИДОВ ОЛОВА**

Методами квантово-механического моделирования установлены зонная структура и оптические свойства объема и одного мономолекулярного слоя дихалькогенидов олова –  $\text{SnS}_2$ ,  $\text{SnSe}_2$  и  $\text{SnTe}_2$ . Показано, что первые два соединения в объеме являются непрямозонными полупроводниками, в то время как  $\text{SnTe}_2$  – бесщелевой полупроводник. При увеличении порядкового номера атома халькогена рассмотренные соединения демонстрируют увеличение постоянной решетки и межатомного расстояния, а также уменьшение ширины запрещенной зоны с 2,4 до 0 эВ. При переходе от объемного материала к одному мономолекулярному слою структурные параметры практически не изменяются; наблюдается пропорциональный рост величины энергетического зазора, в результате чего  $\text{SnTe}_2$  становится узкозонным полупроводником с шириной запрещенной зоны 0,17 эВ. Из исследованных соединений наиболее интересным с точки зрения практического использования является диселенид олова  $\text{SnSe}_2$  благодаря подходящей для применения в фотовольтаике ширине запрещенной зоны (1,0–1,5 эВ) и значениям коэффициента поглощения вблизи края собственного поглощения более  $10^5 \text{ см}^{-1}$ . Также большой интерес представляют тройные растворы замещения, варьирование химического состава которых позволяет изменять в широком диапазоне электронную структуру и оптические свойства материалов.

*Ключевые слова:* дихалькогениды олова, зонная структура, ширина запрещенной зоны, коэффициент оптического поглощения, солнечный элемент.

**V. L. Shaposhnikov, A. V. Krivosheeva, V. E. Borisenko**

*Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus*

## **COMPUTER SIMULATION OF ENERGETIC BANDS AND OPTICAL PARAMETERS OF TIN DICHALCOGENIDES**

The band structure and optical properties of the bulk and one monolayer of  $\text{SnS}_2$ ,  $\text{SnSe}_2$ , and  $\text{SnTe}_2$  were established by means of *ab initio* theoretical modeling. The first two bulk compounds were found to be indirect gap semiconductors, while  $\text{SnTe}_2$  behaves like a gapless semiconductor. As the atomic number of chalcogen is increased, the compounds considered show an increase in lattice constants and interatomic distances, as well as a decrease in the band gap from 2.4 to 0 eV. Upon transition from the bulk material to a single monolayer, the structural parameters remain practically unchanged. There is a proportional increase in the energy gap, whereby  $\text{SnTe}_2$  becomes a narrow-gap semiconductor with a band gap of 0.17 eV. The most interesting compound according to a practical use is tin diselenide  $\text{SnSe}_2$ , due to the band gap (1.0–1.5 eV) and the absorption coefficient near the absorption edge more than  $10^5 \text{ cm}^{-1}$  that are appropriate for photovoltaics. Ternary tin dichalcogenides are also of great interest as the variation of the chemical composition of the latter allows modifying the electronic structure and the optical properties in a wide range.

*Keywords:* tin dichalcogenides, band structure, band gap, absorption coefficient, solar cell.

**А. Д. Замковец<sup>1</sup>, А. Н. Понявина<sup>1</sup>, Л. В. Баран<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь*

<sup>2</sup>*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*

## **ПЛАЗМОННЫЙ РЕЗОНАНС В ПЛАНАРНЫХ СЛОИСТЫХ НАНОСТРУКТУРАХ СЕРЕБРО-ФТАЛОЦИАНИН НИКЕЛЯ**

Изучены спектральные свойства тонких пленок фталоцианина никеля ( $\text{NiPc}$ ) и серебра ( $\text{Ag}$ ), полученных термическим осаждением в вакууме на стеклянные и кварцевые подложки ( $\text{P}$ ), а также планарных гибридных наноструктур, в которых нанометровые пленки органического полупроводника контактируют с островковыми структурами серебра. Исследованы две конфигурации планарных гибридных наноструктур – монослой наночастиц серебра под пленкой фталоцианина никеля ( $\text{P}/\text{Ag}/\text{NiPc}$ ) и монослой наночастиц серебра над пленкой фталоцианина никеля ( $\text{P}/\text{NiPc}/\text{Ag}$ ). Толщина пленок  $\text{NiPc}$  изменялась от 10 до 30 нм. Поверхностная плотность металла составляла  $\sim 2 \cdot 10^{-6} \text{ г}/\text{см}^2$ . С помощью сканирующего зондового микроскопа Solver P47-PRO в полуконтактном режиме изучена структура исследуемых наноструктур. Оптические спектры записывались на спектрофотометре Cary 500. Установлено, что присутствие наночастиц  $\text{Ag}$  наиболее значительно усиливает эффективное поглощение пленки  $\text{NiPc}$  толщиной  $\sim 10 \text{ нм}$  в области электронных полос поглощения  $\lambda \sim 600\text{--}700 \text{ нм}$ . Данный эффект проявляется за счет способности плазмонных наночастиц усиливать локальное поле вблизи своей поверхности на расстояниях, сравнимых с размерами наночастиц. Количественные оценки показали, что наличие наночастиц  $\text{Ag}$  приводит к увеличению оптической плотности на длине волны  $\lambda = 625 \text{ нм}$  для наноструктур  $\text{P}/\text{Ag}/\text{NiPc}$  и  $\text{P}/\text{NiPc}/\text{Ag}$  соответственно на 25 и 33 %. Предполагается, что зависимость величины эффективного поглощения пленки  $\text{NiPc}$  от конструкции гибридной системы может быть связана с особенностями формирования наноструктур в процессе термического осаждения.

*Ключевые слова:* наноструктура, плазмонный резонанс, органический полупроводник, полоса поглощения.

**A. D. Zamkovets<sup>1</sup>, A. N. Ponyavina<sup>1</sup>, L. V. Baran<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*

<sup>2</sup>*Belarusian State University, Minsk, Belarus*

### **PLASMON RESONANCE IN THE PLANAR LAYERED SILVER-NICKEL PHTHALOCYANINE NANOSTRUCTURES**

Spectral properties of nickel phthalocyanine (NiPc) and silver (Ag) thin films, as well as of planar hybrid nanostructures composed of organic semiconductor nanometer films contacting with silver island structures were studied. All nanostructures were fabricated by thermal vacuum evaporation on glass and quartz substrates (S). Two configurations of planar hybrid nanostructures were investigated, in which the silver nanoparticle monolayer was placed under the NiPc film (S/Ag/NiPc) and over the NiPc film (S/NiPc/Ag). The NiPc film thickness was changed from 10 to 30 nm. The silver surface density was about  $2 \cdot 10^{-6}$  g/cm<sup>2</sup>. The surface structure of films was studied with the use of a scanning probe microscope "Solver P47 - PRO" in the semi-contact regime. Optical spectra were recorded by a spectrophotometer "Cary 500". The most significant increase in the organic film absorption in a presence of Ag nanoparticles was observed for the NiPc film thickness of 10 nm over the spectral range of electronic absorption bands  $\lambda \sim 600\text{--}700$  nm. The effect is due to the local field strengthening near the plasmonic nanoparticles surface for distances compared with nanoparticle sizes. Quantitative regards showed that for the nanostructures of S/Ag/NiPc and S/NiPc/Ag the existence of Ag nanoparticles leads to an increase in the optical density at the wavelength  $\lambda = 625$  nm at 25 and 33 %, respectively. We suppose that the dependence of the NiPc film effective absorption on the hybrid nanostructure configuration may be related to the features of the nanostructure formation in the process of thermal evaporation.

*Keywords:* nanostructure, plasmon resonance, organic semiconductor, absorption band.

**N. N. Guschinsky<sup>1</sup>, O. Battaia<sup>2</sup>, A. Dolgui<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>*United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*

<sup>2</sup>*ISAE-Supaéro, Toulouse, France*

<sup>3</sup>*Ecole des Mines de Nantes, Nantes, France*

### **ON OPTIMIZATION OF PROCESSES FOR SEQUENTIAL BATCH MACHINING**

A problem of optimal design of processes of sequential machining of multiple parts on rotary table machines is considered. Batches are processed in a given sequence. Parts of the same batch are located at the working positions of rotary table and are machined simultaneously. Operations are divided into groups which are performed by spindle heads or by turrets. Constraints on the design of spindle heads, turrets, and working positions, as well as on the order of operations are given. The problem is to minimize the estimated cost of machine equipment while reaching a given output. The proposed method to solve the problem is based on its formulation in terms of mixed integer linear programming. Computational results are reported.

*Keywords:* rotary table machine, optimization, sequential batch machining.

**Н. Н. Гушинский<sup>1</sup>, О. Баттайа<sup>2</sup>, А. Долгий<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>*Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь*

<sup>2</sup>*Высшая национальная школа авиации и космоса, Тулуза, Франция*

<sup>3</sup>*Горная школа Нанта, Нант, Франция*

### **К ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЦЕССОВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ОБРАБОТКИ ПАРТИЙ ДЕТАЛЕЙ**

Рассматривается задача оптимального проектирования процессов последовательной обработки партий деталей на станках с поворотным столом. Последовательность обработки партий задана. Детали одной и той же партии устанавливаются на рабочих позициях станка и обрабатываются одновременно. Множество технологических переходов для обработки всех деталей разбивается на группы, которые выполняются с помощью шпиндельных или револьверных головок. Заданы ограничения, связанные с разбиением переходов по шпиндельным и револьверным головкам, рабочим позициям станка, а также порядком выполнения переходов. Задача заключается в минимизации стоимости оборудования станка при обеспечении заданной производительности. Предлагаемый метод решения задачи основан на ее формулировке в терминах смешанного целочисленного линейного программирования. Приводятся результаты вычислительных экспериментов.

*Ключевые слова:* станок с поворотным столом, оптимизация, последовательная обработка партий.

**Н. И. Юрчук, Е. Н. Новиков**

*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*

## **НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ КЛАССИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ**

Если неоднородное уравнение колебаний полуограниченной струны имеет некоторое классическое решение в первой четверти плоскости, то правая часть этого уравнения очевидно непрерывна. В работе доказывается, что в этом случае специальный интеграл от этой правой части, который является лишь обобщенным решением неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны, имеет вторые непрерывные производные и, следовательно, является его классическим решением. Это обобщенное решение отличается от известного обобщенного решения данного уравнения в верхней полуплоскости наличием модуля от пространственной переменной в подынтегральной функции, которой является непрерывная правая часть уравнения. Доказанное утверждение можно использовать для выявления соответствующих необходимых требований гладкости на правую часть уравнения колебаний струны для существования классических решений различных смешанных задач в четверти и полуполосе плоскости.

*Ключевые слова:* неоднородное уравнение колебаний струны, классическое решение, обобщенное решение, необходимое требование гладкости.

**N. I. Yurchuk, E. N. Novikov**

*Belarusian State University, Minsk, Belarus*

## **NECESSARY CONDITIONS FOR EXISTENCE OF CLASSICAL SOLUTIONS TO THE EQUATION OF SEMI-BOUNDED STRING VIBRATION**

If the inhomogeneous equation of semi-bounded string vibration is a classical solution in the first quadrant, then the right-hand side of this equation is obviously continuous. We prove that in this case, a special integral of this right-hand side, which is a generalized solution of the inhomogeneous equation for semi-bounded string vibration, has continuous second derivatives and it is therefore a classical solution. This generalized solution differs from the known generalized solution of this equation in the presence of the upper half of the module of the spatial variable in the integrand, which is a continuous right-hand side of the equation. This assertion can be used to identify the corresponding necessary smoothness requirements on the right-hand side of the equation for string vibration for the existence of classical solutions of different mixed problems in the quarter and the half-plane.

*Keywords:* inhomogeneous equation of string vibration, classical solution, generalized solution, necessary smoothness requirement.