

# ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬнай АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ

---

СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК НАВУК. 2017. № 1

---

# ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ

---

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК. 2017. № 1

---

Журнал основан в январе 1965 г.

Выходит четыре раза в год

Учредитель – Национальная академия наук Беларуси

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь,  
свидетельство о регистрации № 392 от 18.05.2009

*Входит в Перечень научных изданий Республики Беларусь  
для опубликования результатов диссертационных исследований,  
включен в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ)*

Главный редактор

**Сергей Яковлевич Килин** – Президиум Национальной академии наук Беларуси

Редакционная коллегия

- Н. М. Олехнович** – Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению (*заместитель главного редактора*),  
**В. А. Орлович** – Отделение физики, математики и информатики Национальной академии наук Беларуси (*заместитель главного редактора*),  
**Т. Е. Янчук** – (*ведущий редактор журнала*)  
**С. В. Абламейко** – Белорусский государственный университет  
**С. М. Абрамов** – Институт программных систем Российской академии наук  
**В. М. Анищик** – Белорусский государственный университет  
**А. И. Белоус** – Холдинг «ИНТЕГРАЛ»  
**И. В. Гайшун** – Институт математики Национальной академии наук Беларуси  
**С. В. Гапоненко** – Белорусский республиканский фонд фундаментальных исследований  
**А. М. Гончаренко** – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси  
**А. П. Достанко** – Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники  
**Н. А. Изобов** – Институт математики Национальной академии наук Беларуси  
**Н. С. Казак** – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси

**В. И. Корзюк** – Белорусский государственный университет  
**Ф. П. Коршунов** – Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению  
**Ю. А. Курочкин** – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси  
**Н. А. Поклонский** – Белорусский государственный университет  
**С. А. Тихомиров** – Отделение физики, математики и информатики Национальной академии наук Беларуси  
**Л. М. Томильчик** – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси  
**А. В. Тузиков** – Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси  
**Ю. С. Харин** – Научно-исследовательский институт прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета  
**А. Ф. Чернявский** – Институт прикладных физических проблем имени А. Н. Севченко Белорусского государственного университета  
**Л. А. Янович** – Институт математики Национальной академии наук Беларуси  
**В. И. Янчевский** – Институт математики Национальной академии наук Беларуси

#### Редакционный совет

**С. Я. Килин** – Президиум Национальной академии наук Беларуси (Республика Беларусь)  
**С. В. Абламейко** – Белорусский государственный университет (Республика Беларусь)  
**Ж. И. Алферов** – Санкт-Петербургский национальный исследовательский Академический университет Российской академии наук (Российская Федерация)  
**А. Л. Асеев** – Президиум Сибирского отделения Российской академии наук (Российская Федерация)  
**Й. Врахтруп** – Институт физики (3) Штутгартского университета (Федеративная Республика Германия)  
**И. В. Гайшун** – Институт математики Национальной академии наук Беларуси (Республика Беларусь)  
**А. М. Желтиков** – Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (Российская Федерация)  
**В. В. Козлов** – Математический институт имени В. А. Стеклова Российской академии наук (Российская Федерация)  
**Г. Лёйхс** – Институт физики света имени М. Планка (Федеративная Республика Германия)  
**Д. С. Могилевцев** – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (Республика Беларусь)  
**В. А. Орлович** – Отделение физики, математики и информатики Национальной академии наук Беларуси (Республика Беларусь)  
**А. Цайлингер** – Институт квантовой оптики и квантовой информатики Австрийской академии наук (Австрийская Республика)

#### Адрес редакции:

ул. Академическая, 1, к. 119, 220072, г. Минск, Республика Беларусь.  
Тел.: + 375 17 284-19-19; e-mail: [fmvesti@mail.ru](mailto:fmvesti@mail.ru)

[vestifm.belnauka.by](http://vestifm.belnauka.by)

---

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ.

Серия физико-математических наук. 2017. № 1.

*Выходит на русском, белорусском и английском языках*

---

Редактор *Т. Е. Янчук*

Компьютерная верстка *О. Л. Смольской*

Подписано в печать 15.03.2017. Выход в свет 27.03.2017. Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>8</sub>. Бумага офсетная.

Печать цифровая. Усл. печ. л. 14,88. Уч.-изд. л. 16,4. Тираж 72 экз. Заказ 31.

Цена: индивидуальная подписка – 10,34 руб., ведомственная подписка – 25,29 руб.

Издатель и полиграфическое исполнение:

Республиканское унитарное предприятие «Издательский дом «Беларуская навука».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/18 от 02.08.2013. ЛП № 02330/455 от 30.12.2013. Ул. Ф. Скорины, 40, 220141, г. Минск, Республика Беларусь

© РУП «Издательский дом «Беларуская навука»,  
Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук, 2017

# PROCEEDINGS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

---

PHYSIC AND MATHEMATICS SERIES, 2017, no. 1

---

The Journal was founded in January 1965

Periodicity is 4 issues per annum

Founder is the National Academy of Sciences of Belarus

The journal is registered on May 18, 2009 by the Ministry of Information of the Republic of Belarus  
in the State Registry of Mass Media, reg. no. 392

*The Journal is included in The List of Journals for Publication  
of the Results of Dissertation Research in the Republic of Belarus  
and in the database of Russian Science Citation Index (RSCI)*

Editor-in-Chief

**Sergei Kilin** – Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus

Editorial Board

- N. M. Olekhovich** – The Scientific and Practical Materials Research Center of the National Academy of Sciences of Belarus (*Associate Editor-in-Chief*)  
**V. A. Orlovich** – Department of Physics, Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus (*Associate Editor-in-Chief*)  
**T. E. Yanchuk** (*lead editor*)  
**S. V. Ablameyko** – Belarusian State University  
**S. M. Abramov** – Program Systems Institute of the Russian Academy of Sciences  
**V. M. Anishchik** – Belarusian State University  
**A. I. Belous** – “INTEGRAL” Holding  
**I. V. Gaishun** – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus  
**S. V. Gaponenko** – Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research  
**A. M. Goncharenko** – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus  
**A. P. Dostanko** – Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics  
**N. A. Izobov** – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus  
**N. S. Kazak** – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus  
**V. I. Korzyuk** – Belarusian State University  
**F. P. Korshunov** – The Scientific and Practical Materials Research Center of the National Academy of Sciences of Belarus  
**Yu. A. Kurochkin** – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus  
**N. A. Poklonskii** – Belarusian State University  
**S. A. Tikhomirov** – Department of Physics, Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus  
**L. M. Tomil'chik** – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus  
**A. V. Tuzikov** – United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus

**Yu. S. Kharin** – Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the Belarusian State University  
**A. F. Chernyavskii** – A. N. Sevchenko Institute of Applied Physical Problems of Belarusian State University  
**L. A. Yanovich** – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus  
**V. I. Yanchevskii** – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus

#### Editorial Council

**S. Ya. Kilin** – Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus (Republic of Belarus)  
**S. V. Ablameyko** – Belarusian State University (Republic of Belarus)  
**Z. I. Alferov** – St Petersburg National Research Academic University of the Russian Academy of Sciences (Russian Federation)  
**A. L. Aseev** – Presidium of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (Russian Federation)  
**J. Wrachtrup** – Institute of Physics (3) of the University of Stuttgart (Federal Republic of Germany)  
**I. V. Gaishun** – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (Republic of Belarus)  
**A. M. Zheltikov** – Lomonosov Moscow State University (Russian Federation)  
**V. V. Kozlov** – Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences (Russian Federation)  
**G. Leuchs** – Max Planck Institute for the Science of Light (Federal Republic of Germany)  
**D. S. Mogilevcev** – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (Republic of Belarus)  
**V. A. Orlovich** – Department of Physics, Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus (Republic of Belarus)  
**A. Zeilinger** – Institute for Quantum Optics and Quantum Information of the Austrian Academy of Sciences (Republic of Austria)

*Address of the Editorial Office:*

*1, Akademicheskaya Str., room 119, 220072, Minsk, Republic of Belarus.  
Tel.: +375 17 284-19-19; e-mail: fmvesti@mail.ru*

***vestifm.belnauka.by***

---

PROCEEDING OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS.

Physic and Mathematics series, 2017, no. 1.

*Printed in Russian, Belarusian and English languages*

---

Editor *T. E. Yanchuk*

Computer imposition *O. L. Smolskaya*

It is sent of the press 15.03.2017. Appearance 27.03.2017. Format 60×84 $\frac{1}{8}$ . Offset paper.  
The press digital. Printed pages 14,88. Publisher's signatures 16,4. Circulation 72 copies. Order 31.  
Price: individual subscription – 10,34 byn., departmental subscription – 25,29 byn.

Publisher and printing execution:

Republican unitary enterprise "Publishing House "Belaruskaya Navuka".

Certificate on the state registration of the publisher, manufacturer, distributor of printing editions  
No. 1/18 dated August 2, 2013. License for the press no. 02330/455 dated December 30, 2013.

Address: F. Scorina Str., 40, 220141, Minsk, Republic of Belarus.

© RUE "Publishing House "Belaruskaya Navuka",  
Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physic and Mathematics series, 2017

## **СОДЕРЖАНИЕ**

### **МАТЕМАТИКА**

<b>Егоров А. Д.</b> О приближенных формулах для вычисления одного класса функционалов от пуассоновского процесса .....	7
<b>Худяков А. П., Трофимук А. А.</b> Интерполяционные формулы Эрмита – Биркгофа относительно алгебраической и тригонометрической систем функций с одним специальным узлом .....	14
<b>Дирвук Е. В.</b> О приближенном вычислении интегралов с особенностями на концах отрезка интегрирования .....	29
<b>Корзюк В. И., Нгуен Ван Винь.</b> Решение задачи для нестрого гиперболического уравнения четвертого порядка с двукратными характеристиками .....	38
<b>Столярчук И. И.</b> Решение смешанных задач методом характеристик для волнового уравнения с интегральным условием .....	53
<b>Копать Д. Я., Маталыцкий М. А.</b> О нестационарном распределении вероятностей состояний марковской сети с бесконечнолинейными системами обслуживания в условиях высокой нагрузки .....	63
<b>Леваков А. А., Задворный Я. Б.</b> Существование измеримых согласованных селекторов многозначных отображений .....	70
<b>Палуха В. Ю.</b> Статистические тесты на основе оценок энтропии для проверки гипотез о равномерном распределении случайной последовательности .....	79
<b>Швед О. Л.</b> Учет упругой анизотропии триклинного упругопластического материала .....	89

### **ФИЗИКА**

<b>Низовцев А. П., Пушкарчук А. Л., Кутень С. А., Пушкарчук В. А., Килин С. Я., Лузанов А. В., Жикол О. А.</b> Стабильные электронно-ядерные спиновые системы NV <sup>-13</sup> C в алмазе для квантовых технологий ....	98
<b>Лэ Тхи Зиену Хьен, Кутень С. А., Хрущинский А. А.</b> Распределение начальной ионизации в рабочем объеме ионизационной камеры .....	111

### **ИНФОРМАТИКА**

<b>Дудкин А. А., Перцев Д. Ю.</b> Алгоритм сжатия гиперспектральных данных дистанционного зондирования Земли .....	120
--	-----

### **УЧЕНЫЕ БЕЛАРУСИ**

<b>Орлович Валентин Антонович</b> (К 70-летию со дня рождения) .....	127
--	-----

**CONTENTS****MATHEMATICS**

<b>Egorov A. D.</b> Approximate formulas for evaluation of one-class functionals of the Poisson process .....	7
<b>Khudyakov A. P., Trofimuk A. P.</b> Interpolation Hermite – Birkhoff-type formulas with respect to the algebraic and trigonometric systems of functions with one special node .....	14
<b>Dirvuk Y. V.</b> Approximate computation of integrals with the singularities on integration interval ends .....	29
<b>Korzyuk V. I., Nguyen Van Vinh.</b> Solving the problem for the fourth-order nonstrictly hyperbolic equation with double characteristics .....	38
<b>Stolyarchuk I. I.</b> Solution of the mixed problems by the method of characteristics for the wave equation with the integral condition .....	53
<b>Kopats D. J., Matalytski M. A.</b> Non-stationary distribution of the probability states of the Markov network with infinite-server queuing systems operating at high load .....	63
<b>Levakov A. A., Zadvornyy Y. B.</b> Existence of measurable adapted selectors of set-valued functions .....	70
<b>Palukha U. Yu.</b> Statistical tests based on entropy estimates for checking the hypotheses of the uniform distribution of a random sequence .....	79
<b>Shved O. L.</b> Considering the increase in elastic anisotropy of triclinic elastic-plastic material .....	89

**PHYSICS**

<b>Nizovtsev A. P., Pushkarchuk A. L., Kuten S. A., Pushkarchuk V. A., Kilin S. Ya., Luzanov A. V., Zhikol O. A.</b> Robust electronic-nuclear NV- <sup>13</sup> C spin systems in the diamond for quantum technologies .....	98
<b>Le Thi Dieu Hien, Kuten S. A., Khrutchinsky A. A.</b> Initial ionization distribution in the active volume of the ionization chamber .....	111

**INFORMATICS**

<b>Doudkin A. A., Pertsau D. Yu.</b> Compression algorithm of the hyperspectral data of Earth remote sensing .....	120
--	-----

**SCIENTISTS OF BELARUS**

<b>Orlovich Valentin Antonovich</b> (70th anniversary) .....	127
--	-----

**А. Д. Егоров**

*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь*

## **О ПРИБЛИЖЕННЫХ ФОРМУЛАХ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ ПУАССОНОВСКОГО ПРОЦЕССА**

Данная работа посвящена построению приближенных формул для вычисления математического ожидания нелинейных функционалов от случайных процессов. Предполагается, что рассматриваемые случайные процессы допускают хаотические разложения по кратным пуассоновским стохастическим интегралам. Используется подход, основанный на требовании точности приближенных формул для функциональных многочленов третьей степени от траекторий процесса. Применение формул рассматриваемого типа связано с их использованием в качестве элементарных при построении составных формул, сходящихся к точным значениям ожиданий, а также в качестве аппроксимаций математических ожиданий на малом временном промежутке. В случае разложения в бесконечный ряд рассматриваются аппроксимационно точные формулы, в которых используется конечный отрезок хаотического разложения.

*Ключевые слова:* функционалы от случайных процессов, математические ожидания, приближенные формулы, кратные пуассоновские стохастические интегралы, хаотические разложения.

**D. Egorov**

*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*

## **APPROXIMATE FORMULAS FOR EVALUATION OF ONE-CLASS FUNCTIONALS OF THE POISSON PROCESS**

This work is devoted to the construction of approximate formulas for calculation of mathematical expectation of nonlinear functionals defined along the trajectories of random processes. Computation of mathematical expectation of functionals of random processes by the quadrature method is the task that depends heavily on a form in which the process is given. A lot of functional quadrature formulas are built in the cases where the characteristic functional of the process is known in explicit form. Some results are obtained in the cases where the process is the solution of the stochastic differential Itô equation. Recently, the author has proposed the approach to an approximate evaluation of mathematical expectation of a class of nonlinear random functionals based on the use of the Wiener chaos expansion. The article uses chaos expansion with respect to multiple Poisson – Ito integrals to construct functional quadrature formulas for calculating nonlinear functionals of the stochastic process defined on the probability space generated by the Poisson process. The formula is exact for the third-degree symmetric functional polynomial, so the product formula of multiple Poisson – Ito integrals is used for construction.

*Keywords:* functionals of random processes, mathematical expectations, approximate formulas, multiple stochastic Poisson stochastic integrals, chaotic expansions.

**А. П. Худяков, А. А. Трофимук**

*Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина, Брест, Беларусь*

## **ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ ЭРМИТА – БИРКГОФА ОТНОСИТЕЛЬНО АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ С ОДНИМ СПЕЦИАЛЬНЫМ УЗЛОМ**

Данная статья посвящена задаче построения и исследования обобщенных интерполяционных формул Эрмита – Биркгофа. Для функций скалярного аргумента построены алгебраический и тригонометрический интерполяционные многочлены Эрмита – Биркгофа, содержащие значение дифференциального оператора специального вида в одном из узлов. Порядок дифференциального оператора не зависит от числа узлов. Найдены классы многочленов, для которых интерполяционные формулы точны. Построен тригонометрический аналог формулы Лейбница. Получены представления и оценки погрешности интерполирования. Приведен иллюстрационный пример применения формулы тригонометрического интерполирования. Полученные результаты могут быть использованы в теоретических исследованиях как основа построения методов приближения линейных операторов, а также приближенных методов решения некоторых нелинейных операторных уравнений, которые встречаются в нелинейной динамике, математической физике.

*Ключевые слова:* интерполирование Эрмита – Биркгофа, дифференциальный оператор, чебышевская система функций, теорема Ролля, тригонометрическое интерполирование, формула Лейбница, определитель Вандермонда.

A. P. Khudyakov, A. A. Trofimuk

*Brest State University named after A. S. Pushkin, Brest, Belarus*

### **INTERPOLATION HERMITE – BIRKHOFF-TYPE FORMULAS WITH RESPECT TO THE ALGEBRAIC AND TRIGONOMETRIC SYSTEMS OF FUNCTIONS WITH ONE SPECIAL NODE**

This article is devoted to the problem of construction and research of the generalized interpolation Hermite – Birkhoff-type formulas. For the scalar argument functions, the algebraic and trigonometric interpolation Hermite – Birkhoff-type polynomials, containing the value of the differential operator of special form at one of the nodes, are constructed. In the both cases, the differential operator of special form annuls the first basic functions of the corresponding Chebyshev system. Furthermore, the order of the differential operator does not depend on the number of nodes. For interpolation polynomials, the satisfaction theorems of interpolation conditions are proved. The classes of the polynomials, for which the interpolation formulas are exact, are determined. The trigonometric analogue of the Leibniz formula is constructed. This formula is used to prove the satisfaction theorem of interpolation conditions in the trigonometric case. The representations and estimates of the interpolation error are obtained. In algebraic case, to obtain the representations and estimates of interpolation error, the consequence of Rolle's theorem is used. In the trigonometric case, the integral representation of the interpolation error is utilized. The illustrative example of application of the trigonometric interpolation formula is constructed. The results can be used in the theoretical research as a basis for constructing both approximation methods of linear operators and approximate methods of solving some nonlinear operator equations that are available in nonlinear dynamics, mathematical physics.

*Keywords:* Hermite – Birkhoff-type interpolation, differential operator, Chebyshev system of functions, Rolle's theorem, trigonometric interpolation, Leibniz formula, Vandermonde determinant.

**Е. В. Дирвук**

*Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь*

### **О ПРИБЛИЖЕННОМ ВЫЧИСЛЕНИИ ИНТЕГРАЛОВ С ОСОБЕННОСТЯМИ НА КОНЦАХ ОТРЕЗКА ИНТЕГРИРОВАНИЯ**

При решении различных граничных задач, возникает необходимость построения таких квадратурных формул, в которых одна часть узлов задается заранее, другая – может быть взята произвольно. Именно эта проблема и привлекла наше внимание. В настоящей статье описана разработка библиотеки процедур для приближенного вычисления интегралов с весами  $\sqrt{(1 \mp x)/(1 \pm x)}$  и  $1/\sqrt{1-x^2}$  в случае, когда подынтегральная функция имеет особенности на одном или обоих концах отрезка интегрирования. Приведен алгоритм работы библиотеки процедур. На примере показано, что разработанная библиотека процедур значительно уменьшила процессорное время, а значит, усовершенствовала учет вычислительных ресурсов относительно стандартных процедур системы Maple. Далее рассмотрено несколько примеров, на которых проиллюстрирована эффективность построенных квадратурных формул типа Радо и Лобатто в сравнении с результатами из других работ. В завершение продемонстрирован пример вычисления интеграла, в котором отсутствуют веса Чебышева. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего исследования квадратурных формул, а также для изучения свойств интерполяционных рациональных функций.

*Ключевые слова:* квадратурные формулы, интегрирование на отрезке, рациональная аппроксимация, интерполирование, Maple.

**Y. V. Dirvuk**

*Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus*

### **APPROXIMATE COMPUTATION OF INTEGRALS WITH THE SINGULARITIES ON INTEGRATION INTERVAL ENDS**

Various generalizations of Gauss quadrature formulas are the subject of research of many authors. Here, interest is paid to a special kind of quadrature formulas when some nodes are assigned in advance and the others can be taken arbitrarily. In this article, the performance of process libraries is described. The article outlines the procedures for numerical calculation of integrals by weights  $\sqrt{(1 \mp x)/(1 \pm x)}$  and  $1/\sqrt{1-x^2}$  when the integrand function has singularities on one or the both ends of the integration interval. The algorithm of working process libraries is also shown. The example illustrates that the developed library extremely decreases the CPU time, thus improving the recording of computing resources with respect to the standard procedures of the Maple system. Further, some examples are considered. They show the comparison between the effective constructed Lobatto and Radau quadrature formulas and the results of other investigations. In conclusion, the example of calculating the integral with no Chebyshev weight is given. The obtained results can be used both for further research of quadrature formulas and for study of the properties of rational interpolating functions.

*Keywords:* quadrature formulas, segment integration, rational approximation, interpolation, Maple.

**В. И. Корзюк<sup>1,2</sup>, Нгуен Ван Винь<sup>1,3</sup>**

<sup>1</sup>*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*

<sup>2</sup>*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь*

<sup>3</sup>*Хюэский университет, Хюэ, Вьетнам*

## **РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕСТРОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ДВУКРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ**

Изучаются классические решения граничных задач для нестрого гиперболического уравнения четвертого порядка в случае двух независимых переменных с двукратными характеристиками. Под классическим решением понимается функция, которая определена во всех точках замыкания заданной области и имеет все классические производные, входящие в уравнение и условия задачи. Наличие классического решения, построенного в аналитическом виде, для уравнений высшего порядка представляет интерес для вычислительной математики при тестировании численных алгоритмов. Заметим, что корректная постановка смешанных задач для гиперболических уравнений зависит не только от количества характеристик, но и от их расположения. Оператор уравнения представляет собой композицию дифференциальных операторов первого порядка. Уравнение задается в полуполосе двух независимых переменных. На нижнем основании области задаются условия Коши, а на боковых границах – условия Дирихле и Неймана. Методом характеристик выписывается в аналитическом виде решение рассматриваемой задачи, доказывается единственность решений, а также показывается, при каких условиях линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами четвертого порядка представимо в виде рассматриваемого в статье нестрого гиперболического уравнения.

*Ключевые слова:* дифференциальные уравнения, гиперболические уравнения, уравнения четвертого порядка, частные производные, граничные условия, условия Коши, условия Дирихле, условия согласования, классическое решение, нестрого гиперболическое уравнение.

**V. I. Korzyuk<sup>1,2</sup>, Nguyen Van Vinh<sup>1,3</sup>**

<sup>1</sup>*Belarusian State University, Minsk, Belarus*

<sup>2</sup>*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*

<sup>3</sup>*Hue University's College of Education, Hue, Vietnam*

## **SOLVING THE PROBLEM FOR THE FOURTH-ORDER NONSTRICTLY HYPERBOLIC EQUATION WITH DOUBLE CHARACTERISTICS**

This article is concerned with studying the classical solutions of boundary problems for the fourth-order nonstrictly hyperbolic equation with double characteristics. A classical solution is understood as a function that is defined everywhere in the domain closure and has all classical derivatives entering the equation and the problem conditions. The classical solution is built in analytical form for higher-order equations of interest for computational mathematics in testing numerical algorithms. Note that the correct formulation of mixed problems for hyperbolic equations not only depends on the number of characteristics, but also on their location. The operator appearing in the equation involves a composition of first-order differential operators. The equation is defined in the half-band of two independent variables. There are Cauchy's conditions on the domain bottom and Dirichlet's conditions and Neumann's conditions on other boundary. Using the method of characteristics, the analytic solution of the considered problem is written. The uniqueness of the solutions is proved. In addition, it states: under what conditions a linear differential equation with constant fourth-order coefficients can be represented in the form of the nonstrictly hyperbolic equation considered in the article.

*Keywords:* differential equations, hyperbolic equations, partial derivatives, boundary conditions, Cauchy's conditions, Dirichlet's conditions, agreement conditions, classical solution, nonstrictly hyperbolic equations.

**I. I. Stolyarchuk**

*Belarusian State University, Minsk, Belarus*

## **SOLUTION OF THE MIXED PROBLEMS BY THE METHOD OF CHARACTERISTICS FOR THE WAVE EQUATION WITH THE INTEGRAL CONDITION**

The mixed problem for the wave equation with one integral condition and one Dirichlet's condition on the right boundary of the domain is considered in the one-dimensional case. It is proved that the fulfillment of the matching conditions is necessary and sufficient for existence and uniqueness of the classical solution of the given mixed problem under certain smoothness conditions for the given functions. The method of characteristics is used for analysis of the problem. This method is reduced to partitioning the original domain by characteristics line in sub-domains where the solution of the given problem is constructed with the help of initial, boundary and integral conditions. However, in some sub-domains the solution of the problem is reduced to Volterra's second-type equation. For this equation, the theorems of correct solvability are fulfilled. Matching conditions are obtained by equating the values of the solution and its derivatives up to the second-order, including on characteristics. The obtained results allow building either the analytical solution of the given problem if Volterra's equation solution can be constructed in explicit form, or the approximate solution with the help of numerical methods. However, in building the approximate solution, the additional conjugation conditions for solution and its derivatives should be introduced on characteristics.

*Keywords:* wave equation, method of characteristics, integral condition, classical solution, mixed problem.

**И. И. Столярчук**

*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*

## **РЕШЕНИЕ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ**

В одномерном случае для волнового уравнения рассматривается смешанная задача с одним интегральным условием и граничным условием типа Дирихле на правой границе области. Показывается, что при определенных условиях гладкости на заданные функции для существования и единственности классического решения поставленной смешанной задачи необходимо и достаточно выполнения условий согласования на исходные функции. При ее анализе используется метод характеристик, который сводится к построению решения задачи в подобластях, полученных из исходной области при разбиении последней характеристическими прямыми. В каждой из указанных подобластей с помощью начальных, а также интегрального и граничного условий строится решение поставленной задачи, при этом в некоторых подобластях оно сводится к интегральному уравнению Вольтерры второго рода, для которого справедливы теоремы о корректной разрешимости. Условия согласования выводятся при приравнивании значений решения и его производных до второго порядка включительно на характеристиках. Данные результаты позволяют построить как аналитическое решение исходной задачи, если удастся найти решение уравнения Вольтерры второго рода в явном виде, так и приближенное решение задачи с помощью численных методов. Однако при построении приближенного решения следует вводить дополнительные условия сопряжения решения или его производных на характеристиках.

*Ключевые слова:* волновое уравнение, метод характеристик, интегральное условие, классическое решение, смешанная задача.

**Д. Я. Копать, М. А. Маталыцкий**

*Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь*

## **О НЕСТАЦИОНАРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ МАРКОВСКОЙ СЕТИ С БЕСКОНЕЧНОЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ ОБСЛУЖИВАНИЯ В УСЛОВИЯХ ВЫСОКОЙ НАГРУЗКИ**

В настоящей статье объектом исследования является марковская сеть с бесконечнолинейными системами массового обслуживания (СМО). Дисциплины обслуживания заявок в системах – FIFO («первым пришел – первым обслуживается») и время обслуживания заявок в каждой линии СМО сети распределены по экспоненциальному закону со своими параметрами для каждой системы массового обслуживания. Целью исследования является получение достаточного условия представимости нестационарных вероятностей состояний такой сети, функционирующей в условиях высокой нагрузки, в мультипликативном виде. Во введении указана область прикладного применения марковских сетей с бесконечнолинейными системами обслуживания, обоснована актуальность настоящей работы, приведен краткий обзор результатов, полученных по данной тематике ранее. В основной части приведено описание сети, выведена система разностно-дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний сети. Представлен основной результат данной статьи, т. е. мультипликативный вид нестационарных вероятностей состояний описанной выше марковской сети, функционирующей в условиях высокой нагрузки, который сформулирован и доказан в виде теоремы. Полученные результаты могут быть использованы при моделировании поведения информационно-компьютерных систем и сетей, логистических транспортных систем, страховых компаний, банковских сетей и других объектов, стохастическими моделями которых являются сети массового обслуживания.

*Ключевые слова:* марковская сеть, бесконечнолинейные системы обслуживания, условие высокой нагрузки, нестационарный режим, мультипликативный вид.

**D. J. Kopats, M. A. Matalytski**

*Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus*

## **NON-STATIONARY DISTRIBUTION OF THE PROBABILITY STATES OF THE MARKOV NETWORK WITH INFINITE-SERVER QUEUING SYSTEMS OPERATING AT HIGH LOAD**

The object of research is the Markov queuing network with infinite-server queues. The disciplines of the customer's service in queuing systems (QS) are FIFO (first come – first served), service rates of customers are distributed exponentially with their own rates for each QS in each line of QS. The purpose of the research is to obtain sufficient conditions for representability of non-stationary state probabilities of such a network operating within the heavy-traffic regime in the multiplicative form. In the introduction, the field of applications of Markov networks with infinite-server queues has been described; the relevance of this work has also been indicated; a brief overview of the previous results on this subject has been given. In the main part, the network has been shown; the system of Kolmogorov's difference-differential equations for the state probabilities of the network conditions has been derived. The main result of this article is as follows, i.e. the multiplicative form of the non-stationary state probabilities of the above-mentioned Markov network operating within the heavy-traffic regime is formulated and proved as a theorem. The obtained results can be used for modeling the behavior of information and computer systems and networks, transportation systems, insurance companies, banking networks and other facilities, the stochastic models which are the queuing networks.

*Keywords:* Markov networks, infinitely linear service system, high-load condition, non-stationary regime, multiplicative form.

**А. А. Леваков, Я. Б. Задворный**

*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*

## **СУЩЕСТВОВАНИЕ ИЗМЕРИМЫХ СОГЛАСОВАННЫХ СЕЛЕКТОРОВ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ**

В настоящей статье рассматриваются измеримые многозначные случайные отображения, согласованные с заданным потоком  $\sigma$ -алгебр, значениями которых являются замкнутые подмножества некоторого полного сепарабельного метрического пространства. Для них установлен критерий измеримости и согласованности, аналогичный известному критерию Кастэна измеримости многозначных отображений. Доказана теорема о существовании у случайных многозначных отображений измеримых и согласованных селекторов, с заданной точностью аппроксимирующих некоторую однозначную измеримую и согласованную случайную функцию. Данная теорема усилена в случае, когда рассматриваемое многозначное отображение принимает компактные значения. Доказана теорема, обобщающая на многозначные измеримые случайные отображения теорему Филиппова об обратной функции. Полученные результаты могут быть использованы при доказательстве существования и исследовании свойств решений стохастических дифференциальных включений.

*Ключевые слова:* многозначное отображение, селектор, измеримость.

**A. A. Levakov, Y. B. Zadvorny**

*Belarusian State University, Minsk, Belarus*

## **EXISTENCE OF MEASURABLE ADAPTED SELECTORS OF SET-VALUED FUNCTIONS**

The present article is devoted to considering measurable set-valued random functions that are adapted to a fixed filtration of  $\sigma$ -algebras and the values of which are closed subsets of some complete separable metric space. For such functions, a criterion of measurability and adaptation is proved, which is analogous to Castain's well-known criterion of measurability of set-valued functions. A theorem on existence of measurable and adapted selectors of set-valued random functions, which approximate some measurable adapted random function, is obtained. This theorem is improved in the case of set-valued functions with compact values. The generalization of Filippov's theorem about the inverse function to the set-valued measurable random functions is proved. The obtained results can be useful both for proving the existence and for considering the properties of the solutions of stochastic differential inclusions.

*Keywords:* set-valued function, selector, measurability.

**В. Ю. Палуха**

*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*

## **СТАТИСТИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ НА ОСНОВЕ ОЦЕНОК ЭНТРОПИИ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ О РАВНОМЕРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ СЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ**

Рассматривается актуальная в области защиты информации задача построения статистических тестов для проверки гипотезы о дискретном равномерном распределении («чистой случайности») выходных последовательностей криптографических генераторов. Для функционалов энтропии Шеннона, Реньи и Тсаллиса построены точечные статистические оценки на основе подстановочного принципа с использованием частотных статистик. Найдено асимптотическое распределение вероятностей полученных точечных оценок при справедливости гипотезы о «чистой случайности» в асимптотике, означающей, что количество наблюдаемых данных сравнимо с числом оцениваемых параметров. С использованием распределений вероятностей точечных оценок построены интервальные статистические оценки рассматриваемых функционалов информационной энтропии. На основе интервальных оценок разработаны решающие правила для статистической проверки гипотез о «чистой случайности» наблюдаемой дискретной последовательности. Представлены результаты компьютерных экспериментов, в которых разработанные статистические тесты применяются к выходной последовательности криптографического генератора. Выходная двоичная последовательность в этих экспериментах преобразовывалась к последовательности с алфавитом большей размерности путем объединения соседних  $s$  элементов в  $s$ -граммы.

*Ключевые слова:* функционалы энтропии Шеннона, Реньи и Тсаллиса, асимптотически нормальное распределение вероятностей, точечные и интервальные статистические оценки, проверка гипотез, криптографические генераторы случайных и псевдослучайных последовательностей.

**U. Yu. Palukha**

*Belarusian State University, Minsk, Belarus*

## **STATISTICAL TESTS BASED ON ENTROPY ESTIMATES FOR CHECKING THE HYPOTHESES OF THE UNIFORM DISTRIBUTION OF A RANDOM SEQUENCE**

The actual information security problem of developing statistical tests of the hypothesis about a discrete uniform distribution ('pure randomness') of output sequences of cryptographic generators is considered. For the entropy functionals of Shannon, Renyi and Tsallis, the point statistical estimators based on the principle of 'plug-in' frequency statistics are constructed. The asymptotic probability distribution of the constructed point estimators is found when the 'pure randomness' hypothesis in asymptotics is valid, meaning that the number of observed data is comparable with the number of estimated parameters. With the use of the probability distributions of point estimators, the interval statistical estimators of considered information entropy functionals are constructed. On the basis of interval estimators, the decision rules for statistical testing of the hypothesis about the 'pure randomness' of the observed discrete sequence are developed. The results of computer experiments, in which the developed statistical tests are applied to the output sequence of cryptographic generators, are given. In these experiments, the output binary sequence was transformed to the sequence of alphabet with a larger dimension by combining the  $s$  neighboring elements in the  $s$ -grams.

*Keywords:* Shannon, Renyi and Tsallis entropy, asymptotically normal probability distribution, statistical estimators, hypotheses testing, cryptographic generators of random and pseudo-random sequences.

**О. Л. Швед**

*Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси,  
Минск, Беларусь*

## **УЧЕТ УПРУГОЙ АНИЗОТРОПИИ ТРИКЛИННОГО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА**

Рассматривается вопрос о деформационной упругой анизотропии в конкретной модели нелинейной упругопластичности, который представляется важным потому, что чрезмерный рост анизотропии вызывает согласно полученному критерию разрушения непредсказуемо раннее появление макротрещин вследствие пластической деформации.

Свойства материала описываются обобщенным законом упругости Мурнагана. Первоначально материал предполагается изотропным и значения величин параметров анизотропии являются нулевыми. Определяющее уравнение для удельной потенциальной энергии упругой деформации (потенциала напряжений) записывается при общем виде анизотропии – триклинной. Отыскиваются возможные ограничения на параметры для трансверсально-изотропного, ортотропного и моноклинного материалов. Для триклинного материала ненулевыми могут быть все 77 параметров, для моноклинного – 45, для остальных видов анизотропии – 29 параметров. Для трансверсально-изотропного материала найдены ограничения в виде однородных линейных уравнений. Получены также ограничения для кубически-изотропного материала, которые можно использовать только в теории упругости, поскольку данная анизотропия является недеформационной.

Выписывается второе определяющее уравнение в конечном виде для тензора напряжений Коши. Активный упругопластический процесс происходит попеременным чередованием пластических и упругих состояний материала. Рост анизотропии наблюдается в пластическом состоянии (при течении). Вводятся 3 дифференциальных определяющих уравнения при течении: для потенциала напряжений, тензора напряжений и параметров анизотропии. Определяется неотрицательный параметр роста анизотропии. Из системы уравнений находят скорости меры упругих искажений и параметр роста, для которого реализована процедура его минимизации. Проверяется пригодность последнего уравнения для описания полученных ограничений. Установлено, что все они выполняются за исключением части ограничений для трансверсально-изотропного материала, поэтому при одноосных нагружениях указанное уравнение следует дополнить 12 линейными однородными уравнениями.

*Ключевые слова:* упругопластичность, закон Мурнагана, упругая анизотропия, триклинный материал, параметры анизотропии, определяющее уравнение.

O. L. Shved

United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

### CONSIDERING THE INCREASE IN ELASTIC ANISOTROPY OF TRICLINIC ELASTIC-PLASTIC MATERIAL

The task of deformation of elastic anisotropy in a specific nonlinear elastic-plastic model is considered. According to a given criterion, the excessive growth of anisotropy causes the unexpectedly early appearance of macrocracks due to plastic deformation.

The elastic properties of material are described by the generalized Murnaghan law of elasticity. Initially, the material is assumed to be isotropic, and the values of anisotropy parameters are zero. The defining equation for the potential energy density of elastic deformation (stress potential) is written in the general form of anisotropy – triclinic. Possible restrictions for transversely isotropic, orthotropic and monoclinic materials were under search. For triclinic material, all seventy seven parameters can be nonzero. For monoclinic material, forty five parameters can be nonzero, and for other types of anisotropy – twenty nine. For transversely isotropic material, the restrictions in the form of homogeneous linear equations are found. Also, the restrictions on cubic-isotropic materials are found, which can be used only in the theory of elasticity, as this anisotropy is nondeformation.

The second defining equation in finite form for the Cauchy stress tensor is written. An active elastic-plastic process takes place through an alternate alternation of plastic and elastic material states. The growth of anisotropy occurs in the plastic state (in flow). We introduce three differential equations in flow: for voltage potential, stress tensor and anisotropy parameters. The nonnegative parameter of the anisotropy growth is determined. The system of equations yields the measure speed of elastic distortions and the growth parameter to implement the minimization procedure. The suitability of the last equation

**А. П. Низовцев<sup>1</sup>, А. Л. Пушкарчук<sup>2,3</sup>, С. А. Кутень<sup>3</sup>, В. А. Пушкарчук<sup>4</sup>,  
С. Я. Килин<sup>1</sup>, А. В. Лузанов<sup>5</sup>, О. А. Жикол<sup>5</sup>**

<sup>1</sup>Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

<sup>2</sup>Институт физико-органической химии Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

<sup>3</sup>Институт ядерных проблем Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь

<sup>4</sup>Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь

<sup>5</sup>Научно-технологический комплекс «Институт монокристаллов»

Национальной академии наук Украины, Харьков, Украина

### СТАБИЛЬНЫЕ ЭЛЕКТРОННО-ЯДЕРНЫЕ СПИНОВЫЕ СИСТЕМЫ NV<sup>-13</sup>C В АЛМАЗЕ ДЛЯ КВАНТОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Методами компьютерной химии рассчитаны матрицы  $A_{KL}$ , описывающие сверхтонкое взаимодействие (СТВ) электронного спина центра окраски «азот-вакансия» (NV-центра) в алмазе с ядерным спином атома <sup>13</sup>C, который расположен в одном из возможных узлов решетки в пассивированном водородом углеродном кластере C<sub>510</sub>[NV]H<sub>252</sub>. Выполнен систематический анализ скоростей  $W_0$  переворотов ядерных спинов <sup>13</sup>C, индуцируемых их анизотропным СТВ с электронным спином NV-центра. Показано, что в кластере имеются специфические позиции ядерного спина <sup>13</sup>C, в которых он практически не испытывает таких переворотов вследствие малости недиагональных элементов в соответствующих матрицах  $A_{KL}$ . Определено пространственное расположение найденных позиций стабильности в кластере относительно NV-центра и рассчитаны величины характерных расщеплений в спектрах оптически детектируемого магнитного резонанса (ОДМР) для стабильных систем NV<sup>-13</sup>C, по которым их можно идентифицировать в процессе их экспериментального поиска для использования в разрабатываемых квантовых технологиях. Показано, что полностью стабильными ( $W_0 = 0$ ) являются позиции ядерного спина, расположенные на оси симметрии NV-центра. Найденны характеристики восьми таких «осевых» систем NV<sup>-13</sup>C. Впервые обнаружено наличие в кластере дополнительных «неосевых» квазистабильных систем NV<sup>-13</sup>C, имеющих малые скорости переворотов ( $W_0 \rightarrow 0$ ) спина <sup>13</sup>C вследствие высокой локальной симметрии распределения спиновой плотности, обуславливающей малость недиагональных элементов матриц СТВ для таких систем. Пространственно «не осевые» стабильные системы NV<sup>-13</sup>C расположены в плоскости, проходящей через вакансию NV-центра перпендикулярно его оси. Выполненный анализ имеющихся литературных данных показал, что, по-видимому, некоторые из предсказанных стабильных систем NV<sup>-13</sup>C уже наблюдались экспериментально.

*Ключевые слова:* квантовые технологии, кубиты, NV-центр в алмазе, спины, сверхтонкое взаимодействие, квантово-химическое моделирование.

A. P. Nizovtsev<sup>1</sup>, A. L. Pushkarchuk<sup>2,3</sup>, S. A. Kuten<sup>3</sup>, V. A. Pushkarchuk<sup>4</sup>, S. Ya. Kilin<sup>1</sup>, A. V. Luzanov<sup>5</sup>, O. A. Zhikol<sup>5</sup>

<sup>1</sup>*B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*

<sup>2</sup>*Institute of Physical-Organic Chemistry of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*

<sup>3</sup>*Institute for Nuclear Problems of the Belarusian State University, Minsk, Belarus*

<sup>4</sup>*Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus*

<sup>5</sup>*SSI Institute of Single Crystals of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, Ukraine*

## ROBUST ELECTRONIC-NUCLEAR NV-<sup>13</sup>C SPIN SYSTEMS IN THE DIAMOND FOR QUANTUM TECHNOLOGIES

Using the methods of computational chemistry, we calculated matrices  $A_{KL}$  describing hyperfine interactions (HFI) between the electron spin of the color 'nitrogen-vacancy' center (NV center) in a diamond and a <sup>13</sup>C nuclear spin located somewhere in the H-terminated carbon cluster  $C_{510}[NV]H_{252}$  hosting the NV center. The rates  $W_0$  of the <sup>13</sup>C spin flip-flops induced by anisotropic HFI are calculated systematically for all possible locations of <sup>13</sup>C in the cluster. It is shown that in the cluster, there are specific positions of nuclear <sup>13</sup>C spin, in which it almost does not undergo such flip-flops due to small off-diagonal elements in corresponding matrices  $A_{KL}$ . Spatial locations of the <sup>13</sup>C stability positions in the cluster are discovered and characteristic splitting values in the spectra of optically detected magnetic resonance (ODMR) for the stable NV-<sup>13</sup>C systems are calculated, which can be utilized to identify them during their experimental search for use in emerging quantum technologies. It is shown that the positions of the <sup>13</sup>C nuclear spin located on the NV center symmetry axis are completely stable ( $W_0 = 0$ ). The characteristics of eight 'axial' NV-<sup>13</sup>C systems are elucidated. The presence of additional 'non-axial' near-stable NV-<sup>13</sup>C spin systems also exhibiting very low flip-flop rates ( $W_0 \rightarrow 0$ ) due to a high local symmetry of the spin density distribution resulting in vanishing the off-diagonal HFI matrix  $A_{KL}$  elements for such systems is revealed for the first time. Spatially, these 'non-axial' stable NV-<sup>13</sup>C systems are located near the plane passing through the vacancy of the NV center and being perpendicular to the NV axis. Analysis of the available publications showed that apparently, some of the predicted stable NV-<sup>13</sup>C systems have already been observed experimentally.

*Keywords:* quantum technologies, qubits, NV center in diamond, spins, hyperfine interaction, quantum-chemical simulation.

Лэ Тхи Зиеу Хьен<sup>1</sup>, С. А. Кутень<sup>2</sup>, А. А. Хрущинский<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*

<sup>2</sup>*Институт ядерных проблем Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь*

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАЧАЛЬНОЙ ИОНИЗАЦИИ В РАБОЧЕМ ОБЪЕМЕ ИОНИЗАЦИОННОЙ КАМЕРЫ

Рассмотрен вопрос о пространственном распределении пар ионов в рабочем объеме цилиндрической ионизационной камеры деления. Предложена формула для пространственного распределения начальной ионизации в цилиндрической камере деления, в которой слой делящегося вещества нанесен на внутреннюю сторону внешнего электрода. Формула выведена двумя способами: путем подсчета числа пар ионов, генерированных в бесконечно малом объеме внутри рабочего объема камеры всеми треками, исходящими из радиатора. В первом случае бесконечно малый объем имеет форму сферы, во втором – произвольную форму. Формула, полученная без всяких ограничений на направление вылета осколков деления, дает правильное поведение пространственного распределения начальной ионизации как вблизи поверхности радиатора, так и вдали от него. Исследована зависимость начальной плотности ионизации от радиального расстояния до радиатора, создаваемой типичным фрагментом деления – ионом Sr в центре камеры. Исследовано также пространственное распределение начальной плотности ионизации вдоль камеры.

*Ключевые слова:* ионизационная камера деления, радиатор, рабочий объем камеры, плотность пар ионов.

Le Thi Dieu Hien<sup>1</sup>, S. A. Kuten<sup>2</sup>, A. A. Khrutchinsky<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Belarusian State University, Minsk, Belarus*

<sup>2</sup>*Institute for Nuclear Problems of the Belarusian State University, Minsk, Belarus*

## INITIAL IONIZATION DISTRIBUTION IN THE ACTIVE VOLUME OF THE IONIZATION CHAMBER

The task of a spatial distribution of ion pairs in the active volume of the ionization fission chamber has been studied. The formula of a spatial distribution of ion pairs in cylindrical fission chambers, in which a fissile material layer is coated on the internal side of the external electrode, is derived. It is calculated in two ways: counting the number of ion pairs created in the infinitesimal volume inside the active volume of the chamber by all the trajectories, which emanate from a radiator. In the first case, the infinitesimal volume is a sphere. In the second case, it is arbitrary in shape. The formula has evaluated correctly the density of ion pairs at any point in the active volume of the fission chamber. The dependence of the initial density of ion pairs on a radial distance to a radiator created a typical fission fragment – ion Sr in the center of the chamber and the spatial distribution of the initial density of ion pairs along the chamber have been studied.

*Keywords:* fission ionization chamber, sensitive layer, sensitive volume, density of ion pairs.

**А. А. Дудкин<sup>1</sup>, Д. Ю. Перцев<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь*

<sup>2</sup>*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь*

## **АЛГОРИТМ СЖАТИЯ ГИПЕРСПЕКТРАЛЬНЫХ ДАННЫХ ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ ЗЕМЛИ**

Представлены результаты оценки корреляции гиперспектральных данных в пространственной и спектральной областях на примере гиперкуба AVIRIS Moffett Field. На их основе сформулированы ключевые особенности гиперспектральных данных. Приведены основные подходы к сжатию без потерь, выделены алгоритмы, относящиеся к тому или иному классу и применяемые в области дистанционного зондирования, показаны достоинства и недостатки конкретных реализаций на основе предсказания (linear prediction, fast lossless, spectral oriented least squares, correlation-based conditional average prediction, M-CALIC), поиска по таблице (lookup table, locally averaged interband scaling lookup tables) и вейвлет-преобразования (3D-SPECK). С учетом выявленных недостатков разработан алгоритм сжатия гиперспектральных данных, включающий следующие этапы обработки: предобработка (для каждого спектрального канала выполняется независимо), понижение степени корреляции в спектральной области и энтропийный кодер. Приведены результаты тестирования предложенного алгоритма в сравнении с альтернативными кодеками. В качестве тестовых данных использовались гиперкубы, входящие в тестовый набор AVIRIS (Cuprite, Jasper Ridge, Low Altitude, Moffett Field), который является общепризнанным стандартом при исследовании гиперспектральных данных. Полученные результаты свидетельствуют о соответствии разработанного алгоритма альтернативным подходам к сжатию без потерь, применяемым в дистанционном зондировании Земли. Достоинствами указанного алгоритма являются обеспечение параллельной обработки, вычислительная простота (отсутствие операций с высокой латентностью, например, умножения и деления), минимальные требования к объему оперативной памяти (память используется только для хранения гиперкуба и соответствует его объему). С учетом всего вышесказанного допускается схемотехническая реализация алгоритма на борту летательного аппарата.

*Ключевые слова:* гиперспектральные данные, AVIRIS, сжатие без потерь, спектральная корреляция, пространственная корреляция.

**A. A. Doudkin<sup>1</sup>, D. Yu. Pertsau<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*

<sup>2</sup>*Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus*

## **COMPRESSION ALGORITHM OF THE HYPERSPECTRAL DATA OF EARTH REMOTE SENSING**

The evaluation results of hyperspectral data correlation in spatial and spectral domains are presented by the example of the hypercube AVIRIS Moffett Field, and the key features of hyperspectral data are formulated. The basic approaches to lossless compression and the algorithms, which can be applied in Earth remote sensing, are considered. They are the prediction (linear prediction, fast lossless, spectral oriented least squares, correlation-based conditional average prediction, M-CALIC), the lookup tables (lookup table, locally averaged interband scaling lookup tables), the 3D wavelets (3D-SPECK). A compression algorithm of hyperspectral data is proposed with regard to the advantages and disadvantages of specific implementations of the analyzed algorithms in remote sensing. The main algorithm stages are the preprocessing (for each spectral channel, it is executed independently), the reduction of a correlation level in the spectral area and the entropy coder. The test results of the developed algorithm are given in comparison to the alternative codecs on the AVIRIS test set (Cuprite, Jasper Ridge, Low Altitude, Moffett Field) that prove the efficiency of the proposed algorithm: parallel processing, low computing cost (low latency instructions are used, no division and multiplication), small random access memory requirements (the memory is used only for storage of the hypercube). In the context of the above advantages, the hardware implementation of the algorithm is allowed for on board the aircraft.

*Keywords:* hyperspectral compression, AVIRIS, spectral correlation, spatial correlation.